

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Национальный исследовательский  
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

**Н.Р. Стронгина**

**КУРС «ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ»**

**Уравнение теплопроводности как модельная задача дисциплины  
(Модули 4-7, стационарный случай)**

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией  
Института информационных технологий, математики и механики  
для студентов ННГУ, обучающихся по направлению  
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Нижний Новгород  
2021

УДК 519.6  
ББК 22.19  
С-86

С-86 Стронгина Н.Р. Курс «Численные методы»: Уравнение теплопроводности как модельная задача дисциплины (Модули 4-7, стационарный случай): Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2021. – 78 с.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент **А.А. Перов**

Пособие является компонентом учебно-методического комплекса по дисциплине «Численные методы». Уравнение теплопроводности рассматривается как модельная задача дисциплины. На примере краевых задач для указанного уравнения рассмотрены: метод дискретизации, обеспечивающий выполнение разностных аналогов закона сохранения тепла; понятия погрешности, аппроксимации, устойчивости и сходимости; подход к обоснованию сходимости; влияние аппроксимации граничных условий на скорость сходимости; тесты для оценки вычислительной погрешности; примеры отсутствия сходимости и др. Освоение материала подтверждается выполнением контрольных заданий и лабораторной работы

Пособие предназначено для студентов университета, обучающихся по направлению 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», а также для преподавателей. Может быть рекомендовано студентам магистратуры, изучающим параллельные численные методы на основе технологий параллельного программирования.

Ответственный за выпуск:  
председатель методической комиссии  
Института информационных технологий, математики и механики ННГУ  
к.ф.-м.н., доцент А.В. Грезина

УДК 519.6  
ББК 22.19

© Нижегородский государственный  
университет им. Н.И. Лобачевского, 2021

## СОДЕРЖАНИЕ

|  |    |
|--|----|
| Введение.....  | 5  |
| Модуль 4. Стационарное уравнение теплопроводности.<br>Построение консервативных разностных схем на примере<br>модельных задач (применение метода баланса)..... | 8  |
| 4.1. «Разрывная модельная задача» .....  | 8  |
| 4.2. Построение однородной консервативной разностной схемы<br>методом баланса (интегрально-интерполяционный метод) .....                                       | 11 |
| 4.3. Проверка корректности схемы .....   | 15 |
| 4.4. Теоремы о сходимости схемы .....  | 16 |
| 4.5. Варианты расчета коэффициентов консервативных<br>разностных схем.....   | 17 |
| Модуль 5. Основы теории разностных схем<br>на примере стационарного уравнения теплопроводности .....   | 22 |
| 5.1. Модельная задача для доказательства сходимости.....   | 22 |
| 5.2. Погрешность схемы и сходимость .....  | 23 |
| 5.3. Погрешность разностного оператора .....   | 24 |
| 5.4. Погрешность аппроксимации (для схемы) .....   | 27 |
| 5.5. Связь погрешности схемы и погрешности аппроксимации .....   | 28 |
| 5.6. Оценка погрешности аппроксимации .....  | 29 |
| 5.7. Аппроксимация, устойчивость, сходимость .....   | 31 |
| 5.8. Доказательство устойчивости схемы для модельной задачи .....  | 32 |
| 5.9. Завершение доказательства сходимости .....  | 36 |
| 5.10. Анализ общей погрешности .....   | 36 |
| Модуль 7. Модельные задачи и анализ свойств методов на примере<br>стационарного уравнения теплопроводности .....   | 38 |
| 7.1. Модельная задача для оценки вычислительной погрешности...   | 38 |

|  |    |
|--|----|
| 7.2. Способы задания граничных условий .....               | 41 |
| 7.3. Пример аппроксимации граничных условий .....          | 43 |
| 7.4. Аппроксимация граничных условий методом баланса ..... | 45 |
| 7.5. Пример отсутствия сходимости .....                    | 49 |
| 7.6. Пример сходящейся неоднородной схемы .....            | 54 |
| 7.7. Проверка на консервативность. Дисбаланс .....         | 56 |
| Литература .....   | 59 |
| Приложение.....  | 61 |

## ВВЕДЕНИЕ

Развитие вычислительной техники и последующее развитие высокопроизводительных вычислительных систем открывают качественно новые возможности изучения сложных реальных объектов методами вычислительного эксперимента [15, 16].

Машинный вычислительный эксперимент как новый метод научного исследования предполагает дискретизацию исходной задачи. Он требует специальной проработки численного алгоритма: корректность, устойчивость, точность, сходимость. Поэтому на современном этапе подготовки выпускников по направлению «Прикладная математика и информатика» основной целью освоения дисциплины «Численные методы» является изучение фундаментальных принципов построения численных алгоритмов, подходов к анализу их свойств, подготовка студентов к разработке и применению эффективных вычислительных комплексов, необходимых для математического моделирования сложных систем.

В Институте информационных технологий, математики и механики ННГУ в системе подготовки бакалавров по указанному выше направлению дисциплина «Численные методы» изучается на 3-м курсе в течение двух семестров. Обучение включает лекции, практические и лабораторные занятия, самостоятельную работу, зачеты и экзамен. Содержание дисциплины соответствует требованиям федеральных государственных образовательных стандартов и обновляется с учетом проблематики научных исследований и технологий программирования. Фундаментальные основы курса соответствует требованиям типовой программы по направлению «Прикладная математика и информатика», разработанной под руководством академика РАН А.А. Самарского [17].

Курс содержит изучение основ машинной арифметики, анализ структуры погрешности, подходы и методы приближенного вычисления функций, численное дифференцирование и интегрирование, численное решение систем линейных алгебраических уравнений, задач на собственные значения, решение нелинейных алгебраических уравнений и систем. Особое внимание уделяется инструментам математического моделирования сложных систем: методам численного решения задачи Коши и краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), решению уравнений в частных производных, а также структуре соответствующих вычислительных комплексов.

В связи с успешным применением в ННГУ практико-ориентированного подхода и на основе принципа «образование как исследование», вытекающего из положения Гумбольдта «образование на основе исследований» [15], фундаментальный курс «Численные методы» имеет в ННГУ уровневую

структуру. С одной стороны, в нем представлены все основные разделы численного анализа. С другой стороны, актуальные приложения требуют одновременного использования разных методов. Поэтому основой курса является системное изучение модельных задач, описывающих свойства реальных объектов различной природы. Освоение разделов дисциплины построено таким образом, чтобы в течение каждого семестра студенты могли самостоятельно подготовить программную реализацию численного алгоритма для решения модельной задачи, провести вычислительный эксперимент и подготовить отчет.

Нижегородский государственный университет является участником Суперкомпьютерного консорциума университетов России [16]. Студентов 3-го курса, изучающих дисциплину «Численные методы», знакомят с подходами к организации параллельных вычислений. Глубокое изучение этих подходов опирается на тот же комплект модельных задач, но проводится на старших курсах после освоения дисциплин, посвященных технологиям и методам параллельного программирования.

При освоении курса «Численные методы» у студентов 3-го курса должны быть сформированы компетенции разработки и применения программных средств разного уровня сложности. Поэтому требования к программам, подготовленным студентами, также реализуют практико-ориентированный подход. Программа должна быть написана на алгоритмическом языке высокого уровня. Код, реализующий алгоритм, должен быть подготовлен студентом самостоятельно. Объектно-ориентированный подход приветствуется. Программа и способ работы с ней должны быть пригодны не только для выполнения конкретного расчета, но также для проверки корректной реализации метода и результатов вычислительного эксперимента, и затем для изучения свойств метода и свойств моделируемого объекта. Ряд заданий выполняются с помощью специальной программы-тренажера, затем – с помощью программы, подготовленной студентом.

Требования самостоятельной программной реализации алгоритма и последующего самостоятельного проведения вычислительного эксперимента предполагают, что при рассмотрении теоретического материала, проведении практических занятий, выполнении заданий в рамках самостоятельной работы необходимо уделить больше внимания анализу понятийного аппарата дисциплины, доказательной базе, рассмотрению «простых» примеров и разбору по шагам решений специально подобранных задач. Решение именно этой учебной задачи поддерживает предлагаемое пособие.

Изучение тематического модуля, представленного в пособии, опирается на дисциплины «Дифференциальные уравнения», «Математический анализ», «Геометрия и алгебра» и «Программирование на ЭВМ» и осуществляется

одновременно с изучением дисциплин «Уравнения математической физики» и «Функциональный анализ».

Нумерация разделов пособия соответствует установленной в настоящее время нумерации тематических модулей электронного учебного курса «Численные методы», представленного в системе электронного обучения ННГУ (СЭО ННГУ) на базе платформы Moodle. В период весеннего семестра 2019-20 учебного года и осеннего семестра 2020-21 учебного года дистанционная организация учебного процесса по дисциплине «Численные методы» выстраивалась на базе этого электронного курса [18].

Пособие предназначено для студентов университета, обучающихся по направлению подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика», изучающих курс «Численные методы», и преподавателей.

Материал пособия может быть полезен студентам, изучающим в вузе численные методы на различных направлениях подготовки, а также студентам магистратуры ИИТММ, изучающим параллельные численные методы на основе технологий параллельного программирования.

## Модуль 4. Стационарное уравнение теплопроводности. Построение консервативных разностных схем на примере модельных задач (применение метода баланса)

### 4.1. «Разрывная модельная задача»

Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left( k(x) \frac{du}{dx} \right) - q(x)u = -f(x) \\ u(a) = \mu_1, u(b) = \mu_2 \end{cases} \quad (4.1)$$

решением которой является функция  $u(x)$ ,  $x \in [a, b]$ . Коэффициенты  $k(x)$ ,  $q(x)$ ,  $f(x)$  и значения  $\mu_1$  и  $\mu_2$  считаем заданными. При выполнении условий

$$\begin{cases} k(x) > 0, x \in [a, b] \\ q(x) \geq 0, x \in [a, b] \end{cases} \quad (4.1^*)$$

задача (4.1) классифицируется как **первая краевая задача для стационарного уравнения теплопроводности**.

Дифференциальное уравнение задачи (4.1) представляет собой запись закона сохранения тепла для тонкого и однородного в каждом поперечном сечении стержня. Левый конец стержня соответствует точке  $x = a$ , правый – точке  $x = b$ . Длина стержня равна  $l$ , причем  $l = b - a$ . Уравнение (4.1) есть **дифференциальная форма записи закона сохранения тепла на отрезке  $[a, b]$** .

Функция  $u(x)$  описывает **стационарное (не зависящее от времени) распределение температуры** на стержне. Значение  $u(x)$  есть температура стержня в поперечном сечении с координатой  $x \in [a, b]$ . В соответствии с граничными условиями задачи (4.1), на левом и правом концах стержня поддерживаются постоянные (по времени) температуры  $\mu_1$  и  $\mu_2$  соответственно.

Коэффициенты дифференциального уравнения имеют следующий смысл:

$k(x) > 0$  есть коэффициент теплопроводности в поперечном сечении стержня с координатой  $x \in [a, b]$ ;

$q(x) \geq 0$  есть интенсивность теплообмена стержня с окружающей средой через контур поперечного сечения с координатой  $x \in [a, b]$ ;

$f(x)$  есть плотность источников (стоков) тепла в поперечном сечении стержня с координатой  $x \in [a, b]$  – например, вследствие выделения или поглощения тепла химических реакций или электрических токов.



В рамках модели (4.1) теплообмен стержня с окружающей средой описывается законом Ньютона: тепло, поступающее через контур поперечного сечения с координатой  $x$ , пропорционально разности температуры стержня  $u(x)$  и температуры окружающей среды  $\theta(x)$ :

$$-q(x)(u(x) - \theta(x)).$$

Если  $q(x) \neq 0$ , коэффициент  $f(x)$  в уравнении (4.1) включает в себя слагаемое  $q(x)\theta(x)$ .

Функцию

$$w(x) = -k(x)u'(x)$$

называют **функцией теплового потока**. В соответствии с законом Фурье тепловой поток через поперечное сечение стержня пропорционален градиенту температур в том же сечении. Дифференциальное уравнение задачи (4.1) иногда записывают в виде

$$\frac{d w(x)}{dx} + q(x)u(x) - f(x) = 0$$

Далее задачу (4.1) рассматриваем в каждом из двух случаев:

коэффициенты  $k(x), q(x), f(x)$  при  $x \in [a, b]$  являются достаточно гладкими;

коэффициенты  $k(x), q(x), f(x)$  являются достаточно гладкими за исключением конечного числа точек разрыва 1-го рода, расположенных на отрезке  $[a, b]$ .

Второе предположение оказывается полезным при изучении объектов («стержней»), составленных из материалов с разными физическими свойствами или помещенных в среду, параметры которой существенно не однородны по координате  $x \in [a, b]$ .

*Формулировки теорем о существовании и единственности решения задачи (4.1) в случае гладких и разрывных коэффициентов  $k(x), q(x), f(x)$  см. в учебной литературе.*

Если коэффициенты  $k(x), q(x), f(x)$  имеют точки разрыва, постановку задачи необходимо дополнить **условиями сопряжения**.

Предположим, что  $\xi \in (a, b)$  – точка разрыва 1-го рода хотя бы для одного из коэффициентов  $k(x), q(x), f(x)$  и точечные (сосредоточенные) источники (стоки) тепла на стержне отсутствуют. Тогда условия сопряжения принимают вид:

$$\begin{cases} u_+ = u_-, u_+ = \lim_{x \rightarrow \xi + 0} u(x), u_- = \lim_{x \rightarrow \xi - 0} u(x), \\ w_+ = w_-, w_+ = \lim_{x \rightarrow \xi + 0} w(x), w_- = \lim_{x \rightarrow \xi - 0} w(x) \end{cases} \quad (4.1^{**})$$

Условие  $u_+ = u_-$  есть требование **непрерывности температуры** в точке  $\xi \in (a, b)$ , условие  $w_+ = w_-$  есть требование **непрерывности теплового потока** в точке  $\xi \in (a, b)$ .

Условия сопряжения означают: несмотря на разрыв 1-го рода какого-либо из коэффициентов  $k(x)$ ,  $q(x)$ ,  $f(x)$  в точке  $\xi \in (a, b)$  температура  $u(x)$  и тепловой поток  $w(x)$  должны быть непрерывны по  $x$  на всем отрезке  $[a, b]$ . **Такие условия гарантируют существование и единственность решения задачи (4.1).**

Далее «разрывной модельной задачей» называем задачу (4.1) с коэффициентами (4.1\*), без точек разрыва коэффициентов  $k(x)$ ,  $q(x)$ ,  $f(x)$  или с единственной точкой разрыва (разрыв 1-го рода в точке  $\xi \in (a, b)$ ). В случае разрыва коэффициентов ставятся условия сопряжения (4.1\*\*).

Без ограничения общности «разрывную модельную задачу» запишем в виде

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left( k(x) \frac{du}{dx} \right) - q(x)u = -f(x) \\ u(a) = \mu_1, u(b) = \mu_2 \end{cases} \quad (I)$$

$$\begin{cases} k(x) > 0, x \in [a, b] \\ q(x) \geq 0, x \in [a, b] \end{cases}$$

$$k(x) = \begin{cases} k^{(1)}(x), x \in [a, \xi] \\ k^{(2)}(x), x \in [\xi, b] \end{cases}$$

$$q(x) = \begin{cases} q^{(1)}(x), x \in [a, \xi] \\ q^{(2)}(x), x \in [\xi, b] \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} f^{(1)}(x), x \in [a, \xi] \\ f^{(2)}(x), x \in [\xi, b] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \xi+0} u(x) = \lim_{x \rightarrow \xi-0} u(x), \\ \lim_{x \rightarrow \xi+0} \left( k^{(2)}(x)u'(x) \right) = \lim_{x \rightarrow \xi-0} \left( k^{(1)}(x)u'(x) \right) \end{cases}$$

**С целью численного решения «разрывной модельной задачи» (I) построим однородную консервативную разностную схему методом баланса (интегрально-интерполяционным методом).**

## 4.2. Построение однородной консервативной разностной схемы методом баланса (интегрально-интерполяционный метод)

Чтобы решить «разрывную модельную задачу» численно, определим на отрезке  $[a; b]$  равномерную сетку с узлами  $x_i = a + ih, i = 0, n$ , где  $h = \frac{b-a}{n}$  – шаг сетки.

Такую сетку называем сеткой размерности  $n$  (число  $n$  соответствует числу участков, на которые разбит отрезок). Заметим, что на сетке размерности  $n$  определены  $n + 1$  узлов.

Строим вспомогательную сетку с узлами  $x_{i+0.5} = a + (i + 0.5)h, i = 0, n - 1$ .

Такие узлы расположены в центре участков основной сетки: узел  $x_{i+0.5}$  расположен в центре отрезка  $[x_i; x_{i+1}]$ ,  $i = 0, n - 1$ .

**Для построения консервативной разностной схемы перейдем от дифференциальной формы записи закона сохранения тепла к интегральной форме.**

Для этого дифференциальное уравнение задачи (4.1) интегрируем на каждом из участков вспомогательной сетки:

$$\int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} \frac{d}{dx} \left( k(x) \frac{du}{dx} \right) dx - \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} q(x)u(x)dx = - \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} f(x)dx, \quad i = 1, n - 1 \quad (4.2)$$

Каждое из уравнений (4.2) представляет собой **запись закона сохранения тепла на «своем» участке  $[x_{i-0.5}; x_{i+0.5}]$  в интегральной форме.**

Чтобы переписать правую часть (4.2), введем новые коэффициенты

$$\varphi_i = \frac{1}{h} \cdot \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} f(x) dx, \quad i = 1, n - 1 \quad (4.3)$$

и для каждого из участков  $[x_{i-0.5}; x_{i+0.5}]$  запишем

$$- \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} f(x)dx = -h \cdot \frac{1}{h} \cdot \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} f(x) dx = -\varphi_i h. \quad (4.4)$$

Чтобы преобразовать левую часть (4.2), используем приближение

$$\int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} q(x)u(x)dx \approx u(x_i) \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} q(x)dx,$$

введем новые коэффициенты

$$d_i = \frac{1}{h} \cdot \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} q(x) dx, \quad i = 1, n-1 \quad (4.5)$$

и для каждого из участков  $[x_{i-0.5}; x_{i+0.5}]$  запишем

$$\int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} q(x)u(x)dx \approx u(x_i) d_i h \quad (4.6)$$

Несложно показать, что на каждом из участков  $[x_{i-0.5}; x_{i+0.5}]$  в уравнении (4.2) присутствует разность тепловых потоков: функция теплового потока определена как  $w(x) = -k(x)u'(x)$ , откуда следует

$$\int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} \frac{d}{dx} \left( k(x) \frac{du}{dx} \right) dx = - \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} \frac{d}{dx} w(x) dx = w(x_{i-0.5}) - w(x_{i+0.5}) \quad (4.7)$$

Подставляя (4.4), (4.6) и (4.7) в уравнения теплового баланса (4.2) и добавив граничные условия (4.1), получим **систему линейных алгебраических уравнений** (СПАУ)

$$\begin{cases} w(x_{i-0.5}) - w(x_{i+0.5}) - hd_i u(x_i) = -\varphi_i h, & i = 1, n-1 \\ u(x_0) = \mu_1, u(x_n) = \mu_2 \end{cases} \quad (4.8)$$

Система состоит из  $n + 1$  уравнений и содержит  $2n + 1$  неизвестных: не известны значения  $w_{i+0.5}, i = 0, n-1$  (тепловой поток через поперечные сечения в узлах вспомогательной сетки) и неизвестны значения  $u_i, i = 0, n$  (температура в поперечных сечениях в узлах основной сетки).

Чтобы уменьшить число неизвестных, выясним, как связаны потоки и температуры: выразим  $w_{i+0.5}, i = 0, n-1$  через  $u_i, i = 0, n$ .

Из определения  $w(x) = -k(x)u'(x)$  получим  $u'(x) = -\frac{w(x)}{k(x)}$ .

На каждом участке вида  $[x_{i-1}; x_i]$ , то есть для индексов  $i = 1, n$ , записываем интеграл

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(x) dx = - \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{w(x)}{k(x)} dx$$

Слева – интеграл от полной производной температуры:  $\int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(x) dx = u_i - u_{i-1}$ .

Справа используем приближение

$$-\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{w(x)}{k(x)} dx \approx -w(x_{i-0.5}) \cdot \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)}.$$

Тогда справедливо приближенное равенство

$$u_i - u_{i-1} \approx -w(x_{i-0.5}) \cdot \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \quad (4.9)$$

Вводим новые коэффициенты

$$a_i = \left( \frac{1}{h} \cdot \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \right)^{-1}, \quad i = 1, n \quad (4.10)$$

и, пренебрегая приближенным характером равенства (4.9), выразим функцию теплового потока:

$$w_{i-0.5} = \frac{u_{i-1} - u_i}{h} a_i, \quad (4.11)$$

Формула (4.11) справедлива для всех  $i = 1, n$ : **тепловой поток через поперечное сечение узла вспомогательной сетки можно выразить через разность температур в поперечных сечениях соседних с ним узлов основной сетки.**

Справедлива аналогичная формула

$$w_{i+0.5} = -\frac{u_i - u_{i+1}}{h} a_{i+1} \quad (4.12)$$

(для всех  $i = 0, n - 1$ ).

Подставим (4.11), (4.12) в уравнения (4.8), разделим уравнения на  $h$  и преобразуем (4.8) к виду

$$\begin{cases} \frac{u_{i-1} - u_i}{h^2} \cdot a_i - \frac{u_{i+1} - u_i}{h^2} \cdot a_{i+1} - d_i u_i = -\varphi_i, & i = 1, n - 1 \\ u_0 = \mu_1, u_n = \mu_2 \end{cases} \quad (4.13)$$

Это система линейных алгебраических уравнений, в которой  $n + 1$  уравнений,  $n + 1$  неизвестных, неизвестными являются  $u_i, i = 0, n$ .

Так как при построении (4.13) на базе (4.2) были использованы приближения (4.6) и (4.9), решение (4.13) будет отличаться от решения (4.2) и, как следствие, отличаться от решения исходной задачи (4.1). Поэтому для записи исходной задачи и записи СЛАУ (разностной схемы) используют разные обозначения.

Через  $u(x)$ ,  $x \in [a, b]$  обозначим точное решение задачи (4.1).

Через  $u = (u_0, u_1, \dots, u_n) \in R^{n+1}$  обозначим точное решение задачи (4.1) в узлах сетки.

Через  $v = (v_0, v_1, \dots, v_n) \in R^{n+1}$  обозначим точное решение СЛАУ (4.13).

**СЛАУ (4.13) записываем в виде**

$$\begin{cases} \frac{v_{i-1} - v_i}{h^2} \cdot a_i - \frac{v_i - v_{i+1}}{h^2} \cdot a_{i+1} - d_i v_i = -\varphi_i, i = 1, n-1, \\ v_0 = \mu_1, v_n = \mu_2 \end{cases} \quad (4.14)$$

**Коэффициенты СЛАУ определим по формулам (4.3), (4.5) и (4.10):**

$$a_i = \left( \frac{1}{h} \cdot \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \right)^{-1}, i = 1, n$$

$$d_i = \frac{1}{h} \cdot \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} q(x) dx, i = 1, n-1$$

$$\varphi_i = \frac{1}{h} \cdot \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} f(x) dx, i = 1, n-1$$

**Система уравнений (4.14) с коэффициентами (4.3), (4.5) и (4.10) представляет собой однородную консервативную разностную схему для решения первой краевой задачи стационарного уравнения теплопроводности.**

**Схема (4.14) с коэффициентами (4.3), (4.5) и (4.10) построена методом баланса (интегрально-интерполяционным методом).**

*Схема (4.14) построена для решения «разрывной модельной задачи» (I), а также для решения задач вида (4.1) с большим (но конечным) числом точек разрыва 1-го рода коэффициентов задачи.*

### **Комментарии**

*Разностная схема называется консервативной, если в ней реализован разностный аналог физических законов сохранения.*

*Разностная схема называется однородной, если способ записи коэффициентов схемы не зависит от наличия точек разрыва коэффициентов (параметров) дифференциальной задачи (подробнее см. Модуль 7).*

*Примеры неоднородной разностной схемы и неконсервативной разностной схемы представлены в Модуле 7.*

### 4.3. Проверка корректности схемы

Математическая задача называется корректной, если ее решение существует, единственно и непрерывно зависит от начальных условий (или параметров) задачи.

Проверим корректность разностной схемы.

**Теорема (проверка корректности схемы).** При любом  $n \geq 2$  решение разностной схемы (4.14) с коэффициентами (4.3), (4.5), (4.10) существует, единственно и может быть найдено прогонкой. При отыскании решения задачи (4.14) прогонка вычислительно устойчива.

**Доказательство.** Перепишем (4.14) в виде

$$\begin{cases} \frac{a_i}{h^2} \cdot v_{i-1} - \left( \frac{a_i + a_{i+1}}{h^2} + d_i \right) \cdot v_i + \frac{a_{i+1}}{h^2} \cdot v_{i+1} = -\varphi_i, i = 1, n-1, \\ v_0 = \mu_1, v_n = \mu_2 \end{cases} \quad (4.15)$$

Сравним (4.15) с тем, как записывается СЛАУ с 3-х диагональной матрицей в формулировке *Теоремы о применении прогонки* и проверим выполнение условий *Теоремы о применении прогонки*.

При решении (4.15) необходимо найти  $v = (v_0, v_1, \dots, v_n) \in R^{n+1}$ .

Так как  $k(x) > 0$  при любом  $x \in [a, b]$ , получим  $a_i > 0, i = 1, n$ .

Так как  $q(x) \geq 0$  получим  $d_i \geq 0, i = 1, n-1$ .

Очевидно выполнение условий

$$\left| \frac{a_i}{h^2} \right| \neq 0, \quad i = 1, n$$

$$\left| \frac{a_i + a_{i+1}}{h^2} + d_i \right| \geq \left| \frac{a_i}{h^2} \right| + \left| \frac{a_{i+1}}{h^2} \right|, \quad i = 1, n-1$$

Коэффициенты  $\kappa_1, \kappa_2$ , предусмотренные канонической формой записи, в системе (4.15) отсутствуют:  $|\kappa_1| = 0 \leq 1; |\kappa_2| = 0 < 1$ .

Таким образом, существование и единственность решения задачи (4.15), возможность его получения методом прогонки и вычислительная устойчивость прогонки при получении указанного решения вытекают из *Теоремы о применении прогонки*.

*Непрерывная зависимость решения (4.15) от параметров (коэффициентов) СЛАУ при фиксированном  $n$  гарантирована тем, что определитель 3-х диагональной матрицы (в силу Теоремы о применении прогонки) отличен от нуля.*

**Разностная схема (4.14) с коэффициентами (4.3), (4.5) и (4.10) как математическая задача поставлена корректно.**

#### 4.4. Теоремы о сходимости схемы

Точное решение задачи (4.1) в узлах сетки обозначим  $u = (u_0, u_1, \dots, u_n) \in R^{n+1}$ .

Точное решение разностной схемы (4.14) обозначим  $v = (v_0, v_1, \dots, v_n) \in R^{n+1}$ .

**Определение.** **Погрешностью** схемы называют разность точного решения задачи и точного решения схемы в узлах сетки:

$$z = u - v, \text{ где } z_i = u_i - v_i, i = 0, \dots, n. \quad (4.16)$$

Таким образом,  $z = (z_0, z_1, \dots, z_n) \in R^{n+1}$  есть погрешность схемы.

**Определение.** Если при сгущении сетки ( $n \rightarrow +\infty$ ) погрешность  $z$  стремится к нулю ( $\|z\| \rightarrow 0$ ), говорят, что **схема сходится**. Если на всех густых сетках (то есть  $\forall n \geq \hat{N}$ ) для погрешности  $z$  верна оценка

$$\|z\| \leq Mh^k \quad (4.17)$$

где  $h > 0$  – шаг сетки и  $k > 0$ ,  $M > 0$  – константы, не зависящие от  $h$ , говорят, что **схема сходится с порядком  $k$** .

Теоремы о сходимости схемы приведем без доказательства.

##### **Теорема 1 (о сходимости схемы)**

Пусть для «разрывной модельной задачи» (I) коэффициенты  $k(x), q(x), f(x) \in C^{(2)}[a, b]$ .

Тогда схема (4.14) с коэффициентами (4.3), (4.5) и (4.10) сходится с порядком 2:

$$\|z\| \leq Mh^2 \quad (4.18)$$

##### **Теорема 2 (о сходимости схемы)**

Пусть для «разрывной модельной задачи» (I) коэффициенты  $k(x), q(x), f(x) \in Q^{(2)}[a, b]$ .

Тогда схема (4.14) с коэффициентами (4.3), (4.5) и (4.10) сходится с порядком 2:

$$\|z\| \leq Mh^2 \quad (4.19)$$

В оценках (4.18) и (4.19)  $h > 0$  – шаг сетки и  $M > 0$  – константа, которая зависит от коэффициентов задачи  $k(x), q(x), f(x)$ , но не зависит от  $h$ .



## Комментарии

$C^{(2)}[a, b]$  – пространство дважды непрерывно-дифференцируемых функции, заданных на отрезке  $[a, b]$ .

$Q^{(2)}[a, b]$  – пространство функции, заданных на отрезке  $[a, b]$  и имеющих две непрерывные производные, за исключением конечного числа точек разрыва 1-го рода.

### 4.5. Варианты расчета коэффициентов консервативных разностных схем

Для приближенного вычисления интегралов применяются:

формула средних прямоугольников

$$\int_A^B f(x) dx \approx f\left(\frac{A+B}{2}\right)(B-A) \quad (4.20)$$

формула трапеций

$$\int_A^B f(x) dx \approx \frac{f(A) + f(B)}{2}(B-A) \quad (4.21)$$

**Утверждение 1.** Пусть коэффициенты  $k(x)$ ,  $q(x)$ ,  $f(x)$  задачи (4.1) являются достаточно гладкими. Тогда без потери порядка (скорости) сходимости для приближенного решения (4.1) можно использовать однородную консервативную схему

$$\begin{cases} \frac{v_{i-1} - v_i}{h^2} \cdot \tilde{a}_i - \frac{v_i - v_{i+1}}{h^2} \cdot \tilde{a}_{i+1} - \tilde{d}_i v_i = -\tilde{\varphi}_i, & i = 1, n-1, \\ v_0 = \mu_1, & v_n = \mu_2 \end{cases} \quad (4.22)$$

с коэффициентами, вычисленными по формуле «средних прямоугольников»

$$\tilde{a}_i = k_{i-0.5}, i = 1, n,$$

$$\tilde{d}_i = q_i, i = 1, n-1,$$

$$\tilde{\varphi}_i = f_i, i = 1, n-1.$$

или коэффициентами, вычисленными по формуле трапеций

$$\tilde{a}_i = \frac{2 \cdot k_{i-1} \cdot k_i}{k_{i-1} + k_i}, i = 1, n,$$

$$\tilde{d}_i = \frac{q_{i-0.5} + q_{i+0.5}}{2}, i = 1, n-1,$$

$$\tilde{\varphi}_i = \frac{f_{i-0.5} + f_{i+0.5}}{2}, i = 1, n-1.$$

### Комментарий

По формуле средних прямоугольников получим:

$$\frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \approx \frac{1}{h} \cdot h \cdot \frac{1}{k(x_{i-0.5})} = \frac{1}{k_{i-0.5}}$$

$$a_i = \left( \frac{1}{h} \cdot \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \right)^{-1} \approx k_{i-0.5}$$

$$d_i = \frac{1}{h} \cdot \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} q(x) dx \approx \frac{1}{h} \cdot h \cdot q(x_i) = q_i$$

$$\varphi_i = \frac{1}{h} \cdot \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} f(x) dx \approx \frac{1}{h} \cdot h \cdot f(x_i) = f_i$$

По формуле трапеций получим:

$$\frac{1}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \approx \frac{1}{h} \cdot \frac{h}{2} \cdot \left( \frac{1}{k(x_{i-1})} + \frac{1}{k(x_i)} \right) = \frac{k_{i-1} + k_i}{2 \cdot k_{i-1} \cdot k_i}$$

$$a_i = \left( \frac{1}{h} \cdot \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \right)^{-1} \approx \frac{2 \cdot k_{i-1} \cdot k_i}{k_{i-1} + k_i}$$

$$d_i = \frac{1}{h} \cdot \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} q(x) dx \approx \frac{1}{h} \cdot h \cdot \frac{q(x_{i-0.5}) + q(x_{i+0.5})}{2} = \frac{q_{i-0.5} + q_{i+0.5}}{2}$$

$$\varphi_i = \frac{1}{h} \cdot \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} f(x) dx \approx \frac{1}{h} \cdot h \cdot \frac{f(x_{i-0.5}) + f(x_{i+0.5})}{2} = \frac{f_{i-0.5} + f_{i+0.5}}{2}$$

Так как на участках интегрирования длины  $h$  погрешность формулы «средних прямоугольников» и погрешность формулы трапеций составляет  $O(h^3)$ , коэффициенты исходной разностной схемы (4.14) будут вычислены с погрешностью не более  $O(h^2)$ , и это не приводит к снижению порядка сходимости (см. учебную литературу).

**Утверждение 2.** Пусть коэффициенты  $k(x)$ ,  $q(x)$ ,  $f(x)$  задачи (4.1) являются достаточно гладкими за исключением конечного числа точек разрыва 1-го рода.

Тогда однородная консервативная разностная схема (4.22) с коэффициентами, вычисленными по формуле средних прямоугольников (формуле трапеций) на участках гладкости указанных выше коэффициентов задачи, сохраняет порядок сходимости.

### Комментарий

Для коэффициента теплопроводности «разрывной модельной задачи» (I)

$$k(x) = \begin{cases} k^{(1)}(x), & x \in [a, \xi] \\ k^{(2)}(x), & x \in [\xi, b] \end{cases}$$

коэффициент разностной схемы (4.14) имеет вид

$$a_i = \left( \frac{1}{h} \cdot \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \right)^{-1} \approx \begin{cases} \left( \frac{1}{h} \cdot \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k^{(1)}(x)} \right)^{-1}, & \xi \geq x_i \\ \left( \frac{1}{h} \cdot \left( \int_{x_{i-1}}^{\xi} \frac{dx}{k^{(1)}(x)} + \int_{\xi}^{x_i} \frac{dx}{k^{(2)}(x)} \right) \right)^{-1}, & \xi \in (x_{i-1}; x_i) \\ \left( \frac{1}{h} \cdot \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k^{(2)}(x)} \right)^{-1}, & \xi \leq x_{i-1} \end{cases}$$

Коэффициент схемы (4.22), вычисленный с использованием формулы средних прямоугольников, записывается в виде

$$\tilde{a}_i = \begin{cases} k^{(1)}(x_{i-0.5}), & \xi \geq x_i \\ \left( \frac{1}{h} \cdot \left( \frac{\xi - x_{i-1}}{k^{(1)}\left(\frac{x_{i-1} + \xi}{2}\right)} + \frac{x_i - \xi}{k^{(2)}\left(\frac{\xi + x_i}{2}\right)} \right) \right)^{-1}, & \xi \in (x_{i-1}; x_i) \\ k^{(2)}(x_{i-0.5}), & \xi \leq x_{i-1} \end{cases}$$

Для  $q(x)$  – коэффициента теплообмена «разрывной модельной задачи» (I), а именно

$$q(x) = \begin{cases} q^{(1)}(x), & x \in [a, \xi] \\ q^{(2)}(x), & x \in [\xi, b] \end{cases}$$

соответствующий коэффициент разностной схемы (4.14) вычисляется как

$$d_i = \frac{1}{h} \cdot \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} q(x) dx = \begin{cases} \frac{1}{h} \cdot \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} q^{(1)}(x) dx, & \xi \geq x_{i+0.5} \\ \frac{1}{h} \cdot \left( \int_{x_{i-0.5}}^{\xi} q^{(1)}(x) dx + \int_{\xi}^{x_{i+0.5}} q^{(2)}(x) dx \right), & \xi \in (x_{i-0.5}; x_{i+0.5}) \\ \frac{1}{h} \cdot \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} q^{(2)}(x) dx, & \xi \leq x_{i-0.5} \end{cases}$$

Коэффициент схемы (4.22), вычисленный с использованием формулы средних прямоугольников, записывается в виде

$$\tilde{d}_i = \begin{cases} q^{(1)}(x_i), & \xi \geq x_{i+0.5} \\ \frac{1}{h} \cdot \left( q^{(1)}\left(\frac{x_{i-0.5} + \xi}{2}\right) (\xi - x_{i-0.5}) + q^{(2)}\left(\frac{\xi + x_{i+0.5}}{2}\right) (x_{i+0.5} - \xi) \right), & \xi \in (x_{i-0.5}; x_{i+0.5}) \\ q^{(2)}(x_i), & \xi \leq x_{i-0.5} \end{cases}$$

Для  $f(x)$  – коэффициента «разрывной модельной задачи» (I), отвечающего за плотность источников и стоков тепла, а именно

$$f(x) = \begin{cases} f^{(1)}(x), & x \in [a, \xi] \\ f^{(2)}(x), & x \in [\xi, b] \end{cases}$$

соответствующий коэффициент разностной схемы (4.14) записывается аналогично:

$$\varphi_i = \frac{1}{h} \cdot \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} f(x) dx = \begin{cases} \frac{1}{h} \cdot \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} f^{(1)}(x) dx, & \xi \geq x_{i+0.5} \\ \frac{1}{h} \cdot \left( \int_{x_{i-0.5}}^{\xi} f^{(1)}(x) dx + \int_{\xi}^{x_{i+0.5}} f^{(2)}(x) dx \right), & \xi \in (x_{i-0.5}; x_{i+0.5}) \\ \frac{1}{h} \cdot \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} f^{(2)}(x) dx, & \xi \leq x_{i-0.5} \end{cases}$$

Коэффициент схемы (4.22), вычисленный с использованием формулы средних прямоугольников, записывается в виде

$$\tilde{\varphi}_i = \begin{cases} f^{(1)}(x_i), & \xi \geq x_{i+0.5} \\ \frac{1}{h} \cdot \left( f^{(1)}\left(\frac{x_{i-0.5} + \xi}{2}\right) (\xi - x_{i-0.5}) + f^{(2)}\left(\frac{\xi + x_{i+0.5}}{2}\right) (x_{i+0.5} - \xi) \right), & \xi \in (x_{i-0.5}; x_{i+0.5}) \\ f^{(2)}(x_i), & \xi \leq x_{i-0.5} \end{cases}$$

### Задание

Способ вычисления коэффициентов схемы (4.22), основанный на применении формулы трапеций с учетом точки разрыва, запишите самостоятельно.

## Модуль 5. Основы теории разностных схем на примере стационарного уравнения теплопроводности

Аппроксимация, устойчивость, сходимость.

Модельная задача для доказательства сходимости.

Погрешность разностного оператора.

Погрешность аппроксимации и погрешность схемы.

Анализ общей погрешности решения.

### 5.1. Модельная задача для доказательства сходимости

Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} 12u'' - 5u = -7 \\ u(0) = 10, u(1) = 100 \end{cases} \quad (5.1)$$

решением которой является функция  $u(x)$ ,  $x \in [0, 1]$ .

Задача (5.1) есть частный случай задачи (4.1), заданной на отрезке  $[a, b] = [0, 1]$  при  $k(x) = 12$ ,  $q(x) = 5$ ,  $f(x) = 7$  (точка разрыва отсутствует) с граничными условиями  $\mu_1 = 10$ ,  $\mu_2 = 100$ .

**Решение (5.1) существует, единственно и является достаточно гладким.**

Численное решение (5.1) можно найти с помощью консервативной разностной схемы, построенной методом баланса. Для этого на отрезке  $[0, 1]$  определим сетку с узлами

$x_i = ih$ ,  $i = 0, n$  и шагом  $h = \frac{1}{n}$  (сетка размерности  $n$ ). Так как коэффициенты консервативной схемы, построенной методом баланса, принимают значения

$$\varphi_i = \frac{1}{h} \cdot \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} f(x) dx = 7, \quad i = 1, n-1 \quad d_i = \frac{1}{h} \cdot \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} q(x) dx = 5, \quad i = 1, n-1$$

$$a_i = \left( \frac{1}{h} \cdot \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \right)^{-1} = 12, \quad i = 1, n$$

схема записывается в виде

$$\begin{cases} 12 \cdot \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2} - 5v_i = -7, \quad i = 1, n-1, \\ v_0 = 10, v_n = 100 \end{cases} \quad (5.2)$$

и представляет собой систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с 3-х диагональной матрицей.

На примере задачи (5.1) и консервативной схемы (5.2) покажем, как можно доказывать сходимость решения разностных схем к решению дифференциальных задач.

## 5.2. Погрешность схемы и сходимость

Точное решение задачи (5.1) обозначим  $u(x)$ ,  $x \in [0,1]$ .

Точное решение задачи (5.1) в узлах сетки обозначим  $u = (u_0, u_1, \dots, u_n) \in R^{n+1}$ .

Точное решение разностной схемы (5.2) обозначим  $v = (v_0, v_1, \dots, v_n) \in R^{n+1}$ .

**Определение.** Погрешностью схемы называют разность точного решения задачи и точного решения схемы в узлах сетки:

$$z = u - v, \text{ где } z_i = u_i - v_i, i = 0, \dots, n. \quad (5.3)$$

Таким образом, вектор  $z = (z_0, z_1, \dots, z_n) \in R^{n+1}$  есть погрешность схемы.

Для изучения  $z$  используем норму  $\|z\|$ . Среди способов задания нормы отметим:

$$\|z\|_1 = \sum_{i=0}^n |z_i| \text{ – норма, порождающая расстояние «городских кварталов»};$$

$$\|z\|_2 = \sqrt{(z, z)} \text{ – евклидова норма};$$

$$\|z\|_\infty = \max_{i=0, n} |z_i| \text{ – норма, порождающая расстояние Чебышева.}$$

**Определение.** Если при сгущении сетки ( $n \rightarrow +\infty$ ) погрешность  $z$  стремится к нулю ( $\|z\| \rightarrow 0$ ), говорят, что схема **сходится**. Если на всех достаточно густых сетках (то есть  $\forall n \geq \hat{N}$ ) для погрешности  $z$  верна оценка

$$\|z\| \leq Mh^k \quad (5.4)$$

где  $h > 0$  – шаг сетки и  $k > 0$ ,  $M > 0$  – константы, не зависящие от  $h$ , говорят, что схема **сходится с порядком  $k$** .

(так как  $\lim_{n \rightarrow +\infty} Mh^k = 0$ , из оценки (5.4) следует сходимость).

Сходимость схемы (5.2) будем доказывать, используя норму  $\|z\|_\infty$ .

### 5.3. Погрешность разностного оператора

Разностная схема (5.2) содержит выражения, относящиеся к категории **разностных операторов**, а именно, выражения:

$$\frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2}, i = 1, \dots, n - 1.$$

Для указанных выше выражений используются обозначения

$$[v_{x\bar{x}}]_i = \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2}, i = 1, \dots, n - 1. \quad (5.5)$$

Каждый из операторов  $[v_{x\bar{x}}]_i, i = 1, \dots, n - 1$  называется **центральным разностным оператором для вычисления второй производной на трехточечном шаблоне**, то есть в точке  $x_i$  с использованием точек  $x_{i+1}, x_{i-1}$  (далее кратко – разностный оператор).

Покажем, почему оператор вида (5.5), не содержащий производных, может использоваться для численного дифференцирования.

Пусть  $u(x)$  – произвольная достаточно гладкая функция, заданная на отрезке  $x \in [0, 1]$ .

Пусть на отрезке  $x \in [0, 1]$  задана сетка с узлами  $x_i = ih, i = 0, n$  и шагом  $h = \frac{1}{n}$ .

Рассмотрим разностный оператор  $[u_{x\bar{x}}]_i$ , заданный в узле  $x_i$ .

$$[u_{x\bar{x}}]_i = \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2}. \quad (5.6)$$

**Определение.** **Погрешностью разностного оператора**  $[u_{x\bar{x}}]_i$ , заданного в узле  $x_i$ , называется разность значения производной  $u''(x_i)$ , для вычисления которой используется оператор, и значения самого оператора:

$$\psi^*(x_i) = u''(x_i) - [u_{x\bar{x}}]_i. \quad (5.7)$$

Исследуем погрешность оператора. Для этого запишем ее в виде

$$\psi^*(x_i) = u''(x_i) - \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} \quad (5.8)$$

и каждое слагаемое (5.8) представим формулой Тейлора в окрестности точки  $x_i$  (при изучении погрешности разностных операторов формула Тейлора выписывается в окрестности той точки, в которой нужно вычислить производную).

Слагаемые  $u''(x_i)$  и  $u_i = u(x_i)$  уже представлены формулой Тейлора в точке  $x_i$ .



Для  $u_{i+1}$  и  $u_{i-1}$  формулу Тейлора запишем в виде

$$u_{i+1} = u(x_i + h) = u(x_i) + u'(x_i) \cdot h + u''(x_i) \cdot \frac{h^2}{2!} + u'''(x_i) \cdot \frac{h^3}{3!} + u^{IV}(\xi_i) \cdot \frac{h^4}{4!} \quad (5.9)$$

где неизвестная средняя точка обозначена через  $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ ;

$$u_{i-1} = u(x_i - h) = u(x_i) - u'(x_i) \cdot h + u''(x_i) \cdot \frac{h^2}{2!} - u'''(x_i) \cdot \frac{h^3}{3!} + u^{IV}(\eta_i) \cdot \frac{h^4}{4!} \quad (5.10)$$

где неизвестная средняя точка обозначена через  $\eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ .

Так как

$$u_{i+1} + u_{i-1} = 2 \cdot u(x_i) + 2 \cdot u''(x_i) \cdot \frac{h^2}{2} + (u^{IV}(\xi_i) + u^{IV}(\eta_i)) \cdot \frac{h^4}{24}$$

при подстановке данной суммы в формулу (5.8) получим

$$\begin{aligned} \psi^*(x_i) &= u''(x_i) - \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} = \\ &= u''(x_i) - \frac{2 \cdot u(x_i) + u''(x_i) \cdot h^2 + (u^{IV}(\xi_i) + u^{IV}(\eta_i)) \cdot \frac{h^4}{24} - 2u_i}{h^2} = \\ &= - (u^{IV}(\xi_i) + u^{IV}(\eta_i)) \cdot \frac{h^2}{24} \end{aligned}$$

**Теорема (о погрешности оператора).** Пусть  $u(x)$  – некоторая достаточно гладкая функция, заданная на отрезке  $x \in [0, 1]$ . Пусть на отрезке  $x \in [0, 1]$  задана сетка с узлами  $x_i = ih, i = 0, n$  и шагом  $h = \frac{1}{n}$ . Тогда во внутренних узлах сетки, то есть в узлах  $x_i = ih, i = 1, n - 1$ , разностный оператор  $[u_{x\bar{x}}]_i$  аппроксимирует вторую производную  $u''(x_i)$  и для погрешности разностного оператора верно:

$$\psi^*(x_i) = - (u^{IV}(\xi_i) + u^{IV}(\eta_i)) \cdot \frac{h^2}{24}, \quad (5.11)$$

где  $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ ,  $\eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$  – некоторые неизвестные средние точки; также верно

$$\psi^*(x_i) = -u^{IV}(x_i) \cdot \frac{h^2}{12} + o(h^2). \quad (5.12)$$

**Доказательство.** Представление погрешности в виде (5.11) доказано выше.

Чтобы доказать (5.12), используем другой способ записи формулы Тейлора, а именно,  $u_{i+1}$  и  $u_{i-1}$  запишем в виде

$$\begin{aligned} u_{i+1} &= u(x_i + h) = \\ &= u(x_i) + u'(x_i) \cdot h + u''(x_i) \cdot \frac{h^2}{2!} + u'''(x_i) \cdot \frac{h^3}{3!} + u^{IV}(x_i) \cdot \frac{h^4}{4!} + o(h^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{i-1} &= u(x_i - h) = \\ &= u(x_i) - u'(x_i) \cdot h + u''(x_i) \cdot \frac{h^2}{2!} - u'''(x_i) \cdot \frac{h^3}{3!} + u^{IV}(x_i) \cdot \frac{h^4}{4!} + o(h^4) \end{aligned}$$

откуда следует

$$u_{i+1} + u_{i-1} = 2 \cdot u(x_i) + 2 \cdot u''(x_i) \cdot \frac{h^2}{2} + 2 \cdot u^{IV}(x_i) \cdot \frac{h^4}{24} + o(h^4).$$

При подстановке данной суммы в формулу погрешности оператора (5.8) получим

$$\begin{aligned} \psi^*(x_i) &= u''(x_i) - \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} = \\ &= u''(x_i) - \frac{2 \cdot u(x_i) + u''(x_i) \cdot h^2 + u^{IV}(x_i) \cdot \frac{h^4}{12} + o(h^4) - 2u_i}{h^2} = \\ &= -u^{IV}(x_i) \cdot \frac{h^2}{12} + o(h^2) \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

**Следствие 1.** Пусть  $u(x)$  – полином степени не выше 3. Тогда разностный оператор  $[u_{x\bar{x}}]_i$  аппроксимирует вторую производную  $u''(x_i)$  абсолютно точно, то есть

$$u''(x_i) = [u_{x\bar{x}}]_i \quad (5.13)$$

**Доказательство.** Если  $u(x)$  – полином степени не выше 3, то  $u^{IV}(x) \equiv 0$ . Поэтому из (5.11) следует  $\psi^*(x_i) = 0$ .

**Следствие 2.** Для погрешности разностного оператора в узлах  $x_i = ih, i = 1, n - 1$ , верна оценка

$$\left| \psi^*(x_i) \right| \leq \frac{h^2}{12} \cdot \max_{x \in [x_{i-1}; x_{i+1}]} |u^{IV}(x)|. \quad (5.14)$$

**Доказательство.** Действительно, из свойства (5.11) получим

$$\begin{aligned} |\psi^*(x_i)| &\leq \frac{h^2}{24} \cdot |u^{IV}(\xi_i)| + \frac{h^2}{24} \cdot |u^{IV}(\eta_i)| \leq \\ &\leq \frac{h^2}{24} \cdot \max_{x \in [x_i; x_{i+1}]} |u^{IV}(x)| + \frac{h^2}{24} \cdot \max_{x \in [x_{i-1}; x_i]} |u^{IV}(x)| \leq \frac{h^2}{12} \cdot \max_{x \in [x_{i-1}; x_{i+1}]} |u^{IV}(x)| \end{aligned}$$

Из (5.11), (5.12), (5.14) следует: **разностный оператор**  $[u_{x\bar{x}}]_i$  **можно использовать для вычисления второй производной**  $u''(x_i)$ : при измельчении сетки погрешность оператора стремится к нулю.

#### 5.4. Погрешность аппроксимации (для схемы)

Для уравнений произвольного вида **невязкой** называют *разность левой и правой частей уравнения*.

Например, запишем уравнение  $5x = 15$ , тогда  $5x - 15$  – невязка. Если в качестве  $x$  взять точное решение уравнения, невязка обратится в ноль:  $x = 3$  решение,  $5 \times 3 = 15$ , при этом невязка  $5 \times 3 - 15 = 0$ .

Если в качестве  $x$  взять значение, не являющееся решением, *невязка*  $5x - 15$  показывает, насколько различаются левая и правая части уравнения при выбранном  $x$ .

**Определение.** Для произвольной дифференциальной задачи и разностной схемы **погрешностью аппроксимации**  $\psi$  называют *невязку разностной схемы, при условии, что в нее подставили точное решение дифференциальной задачи*.

**Определение.** Для задачи (5.1) и разностной схемы (5.2) **погрешностью аппроксимации**  $\psi$  называют *невязку разностной схемы (5.2), при условии, что в нее подставили точное решение дифференциальной задачи (5.1), при этом (по определению невязки):*

$$\psi_0 = u_0 - 10 \quad (5.15)$$

$$\psi_i = 12 \cdot \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} - 5u_i + 7, i = 1, \dots, n-1 \quad (5.16)$$

$$\psi_n = u_n - 100 \quad (5.17)$$

Таким образом,  $\psi = (\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n) \in R^{n+1}$  есть погрешность аппроксимации.

*Вектор  $\psi$  имеет столько компонент, сколько уравнений в разностной схеме.*

Среди способов задания нормы  $\|\psi\|$  отметим  $\|\psi\|_1, \|\psi\|_2, \|\psi\|_\infty$ . При изучении задачи (5.1) и схемы (5.2) будем использовать  $\|\psi\|_\infty$ .

### 5.5. Связь погрешности схемы и погрешности аппроксимации

**Теорема (о связи погрешностей  $z$  и  $\psi$ ).** Для задачи (5.1) и схемы (5.2) компоненты погрешности  $z$  и компоненты погрешности аппроксимации  $\psi$  связаны системой уравнений

$$\begin{cases} 12 \cdot \frac{z_{i-1} - 2z_i + z_{i+1}}{h^2} - 5z_i = \psi_i, i = 1, n-1, \\ z_0 = \psi_0, z_n = \psi_n \end{cases} \quad (5.18)$$

СЛАУ (5.8) имеет такую же структуру (такую же матрицу), как СЛАУ (5.2). В левой части (5.18) вместо  $v$  записывается погрешность схемы  $z$ , а в правой – вместо правой части (5.2) записывается погрешность аппроксимации  $\psi$ .

**Доказательство.** Компоненту погрешности  $z_0$  запишем по определению:

$z_0 = u_0 - v_0$ . Затем, поскольку  $v$  является точным решением схемы (5.2), используем равенство  $v_0 = 10$  и обнаружим, что  $u_0 - 10$  есть определение компоненты погрешности аппроксимации  $\psi_0$ , см. (5.15):

$$z_0 = u_0 - v_0 = u_0 - 10 = \psi_0$$

Аналогично запишем компоненту погрешности  $z_n$  (по определению она равна  $u_n - v_n$ ). Затем, поскольку  $v$  является точным решением схемы (5.2), используем равенство  $v_n = 100$  и обнаружим, что  $u_n - 100$  есть определение компоненты погрешности аппроксимации  $\psi_n$ , см. (5.17):

$$z_n = u_n - v_n = u_n - 100 = \psi_n$$

Для индексов  $i = 1, n-1$  в левую часть уравнений (5.2) вместо компонент вектора  $v$  запишем компоненты погрешности  $z$ , затем подставим определения компонент погрешности, то есть  $z_i = u_i - v_i$ ,  $i = 1, n-1$ , см. (5.3), и перегруппируем слагаемые:

$$\begin{aligned} & 12 \cdot \frac{z_{i-1} - 2z_i + z_{i+1}}{h^2} - 5z_i = \\ & = 12 \cdot \frac{(u_{i-1} - v_{i-1}) - 2(u_i - v_i) + (u_{i+1} - v_{i+1})}{h^2} - 5(u_i - v_i) = \\ & = \left( 12 \cdot \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} - 5u_i \right) - \left( 12 \cdot \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2} - 5v_i \right) \end{aligned}$$

Поскольку  $v$  является точным решением схемы (5.2), используем равенства

$$12 \cdot \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2} - 5v_i = -7, \quad i = 1, n-1$$

и выражения во вторых парах скобок в проведенных выше выкладках заменим на  $(-7)$ :

$$12 \cdot \frac{z_{i-1} - 2z_i + z_{i+1}}{h^2} - 5z_i = \left( 12 \cdot \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} - 5u_i \right) + 7 = \psi_i, \quad i = 1, n-1$$

В соответствии с определением (5.16) левые части уравнений (5.18) при  $i = 1, n-1$  оказались равными компонентам погрешности аппроксимации.

Теорема доказана.

### 5.6. Оценка погрешности аппроксимации

**Теорема (об оценке погрешности  $\psi$ ).** Разностная схема (5.2) аппроксимирует задачу (5.1) абсолютно точно на границе

$$\psi_0 = 0, \quad \psi_n = 0 \tag{5.19}$$

и со вторым порядком на основном уравнении: верна оценка

$$\max_{i=1, n-1} |\psi_i| \leq \hat{M}h^2, \tag{5.20}$$

где  $\hat{M} = \max_{x \in [0,1]} |u^{IV}(x)|$ , значение  $\hat{M}$  не зависит от  $h$ .

**Доказательство.** Так как решение задачи (5.1) соответствует граничным условиям

$$u_0 = 10 \quad (u(0) = 10),$$

$$u_n = 100 \quad (u(1) = 100),$$

для начальной и последней компонент погрешности  $\psi$  верно

$$\psi_0 = u_0 - 10 = 0,$$

$$\psi_n = u_n - 100 = 0.$$

Тогда говорят, что аппроксимация граничных условий является абсолютно точной.

Компоненты погрешности  $\psi$  с номерами  $i = 1, n-1$  запишем по определению

$$\psi_i = 12 \cdot \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} - 5u_i + 7.$$

Для точного решения задачи (5.1) основное (дифференциальное) уравнение выполняется в любой точке отрезка  $x \in [0, 1]$ . Для каждого из узлов сетки  $x_i, i = 1, n - 1$  запишем

$$12 \cdot u''(x_i) - 5u(x_i) + 7 = 0$$

и вычтем данное (равное нулю) выражение из компоненты погрешности аппроксимации:

$$\psi_i = 12 \cdot \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} - 5u_i + 7 - \{12 \cdot u''(x_i) - 5u(x_i) + 7\}, i = 1, n - 1.$$

Перегруппировав слагаемые, получим

$$\begin{aligned} \psi_i &= \left( 12 \cdot \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} - 12 \cdot u''(x_i) \right) - (5u_i - 5u(x_i)) + (7 - 7) = \\ &= 12 \cdot \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} - 12 \cdot u''(x_i) = -12 \cdot \psi^*(x_i) \end{aligned}$$

где  $\psi^*(x_i)$  есть погрешность разностного оператора  $[u_{x\bar{x}}]_i$  в точке  $x_i$ , см. (5.8).

Таким образом, **компонента  $\psi_i$  вектора погрешности аппроксимации  $\psi$  линейно зависит от погрешности разностного оператора в точке  $x_i$ :  $\psi_i = -12 \cdot \psi^*(x_i)$ .**

С учетом свойств (5.11) и (5.12) для каждого  $i = 1, n - 1$  получим

$$\psi_i = 12 \cdot \frac{h^2}{24} \{u^{\text{IV}}(\xi_i) + u^{\text{IV}}(\eta_i)\}. \quad (5.21)$$

где  $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ ,  $\eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$  – неизвестные средние точки;

$$\psi_i = 12 \cdot \frac{h^2}{12} u^{\text{IV}}(x_i) + o(h^2). \quad (5.22)$$

На базе (5.21) для каждой компоненты  $\psi_i$  с индексами  $i = 1, n - 1$  строим оценку

$$|\psi_i| \leq \frac{h^2}{2} |u^{\text{IV}}(\xi_i)| + \frac{h^2}{2} |u^{\text{IV}}(\eta_i)| \leq \max_{x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]} |u^{\text{IV}}(x)| \cdot h^2 \quad (5.23)$$

Чтобы оценка была справедлива для всех индексов  $i = 1, n - 1$  одновременно, расширим диапазон значений  $x$ , на котором берется максимум:

$$|\psi_i| \leq \max_{x \in [x_0, x_n]} |u^{\text{IV}}(x)| \cdot h^2 \quad (5.24)$$

Это означает, что  $\max_{i=1, n-1} |\psi_i| \leq \hat{M}h^2$ ,

где  $\hat{M} = \max_{x \in [0,1]} |u^{IV}(x)|$  и значение  $\hat{M}$  не зависит от  $h$ .

Теорема доказана.

**Следствие.** Так как  $\max_{i=0, n} |\psi_i| = \max_{i=1, n-1} |\psi_i|$  (в силу  $\psi_0 = \psi_n = 0$ ), верна оценка

$$\|\psi\|_{\infty} \leq \hat{M} \cdot h^2. \quad (5.25)$$

Для модельной задачи (5.1) и консервативной разностной схемы (5.2) доказано, что схема аппроксимирует модельную задачу с порядком 2.

### 5.7. Аппроксимация, устойчивость, сходимост

**Определение.** Если при сгущении сетки ( $n \rightarrow +\infty$ ) погрешность  $\psi$  стремится к нулю ( $\|\psi\| \rightarrow 0$ ), говорят, что разностная схема **аппроксимирует** дифференциальную задачу. Если на всех густых сетках (при  $\forall n \geq \hat{N}$ ) верна оценка

$$\|\psi\| \leq \hat{M}h^k \quad (5.26)$$

где  $h > 0$  – шаг сетки и  $k > 0$ ,  $\hat{M} > 0$  – константы, не зависящие от  $h$ , говорят, что **разностная схема аппроксимирует дифференциальную задачу с порядком  $k$** .

**Определение.** Если на всех густых сетках (при  $\forall n \geq \hat{N}$ ) верна оценка

$$\|z\| \leq C \|\psi\|, \quad (5.27)$$

где  $C > 0$  – константа, не зависящая от  $h$ , говорят, что **разностная схема устойчива**.

Если на всех густых сетках (при  $\forall n \geq \hat{N}$ ) неравенства (5.26) и (5.27) выполнены и в них использован один и тот же способ задания нормы погрешности  $\psi$ , то

$$\|z\| \leq C \|\psi\| \leq C \cdot \hat{M} \cdot h^k = M \cdot h^k, \quad (5.28)$$

где  $h > 0$  – шаг сетки и  $k > 0$ ,  $M = C \cdot \hat{M} > 0$  – константы, не зависящие от  $h$ .

Неравенство (5.28) означает, что в соответствии с определением (5.4) **разностная схема сходится с порядком  $k$** .

**Теорема (о сходимости разностных схем).** Если схема устойчива и оценки (5.26) и (5.27) выполнены в одной и той же норме для погрешности аппроксимации, аппроксимация с порядком  $k$  влечет сходимост с тем же порядком.

### 5.8. Доказательство устойчивости схемы для модельной задачи

Для доказательства устойчивости схемы (5.2) используем СЛАУ (5.18), потому что (5.18) связывает компоненты погрешности  $z$  и компоненты погрешности аппроксимации  $\psi$ .

С учетом того, что схема (5.2) аппроксимирует дифференциальное уравнение на граничных условиях абсолютно точно, то есть  $\psi_0 = \psi_n = 0$ , запишем (5.18) в виде

$$\begin{cases} 12 \cdot \frac{z_{i-1} - 2z_i + z_{i+1}}{h^2} - 5z_i = \psi_i, i = 1, n-1, \\ z_0 = 0, z_n = 0 \end{cases} \quad (5.29)$$

**Теорема (об устойчивости).** Консервативная разностная схема (5.2) устойчива:

$$\|z\|_{\infty} \leq C \cdot \|\psi\|_{\infty} \quad (5.30)$$

где  $C > 0$  – константа, не зависящая от  $h$ .

**Доказательство.** Запишем канонический вид СЛАУ с 3-х диагональной матрицей:

$$\begin{cases} A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -\phi_i, i = 1, n-1, \\ y_0 - \kappa_1 y_1 = \mu_1, y_n - \kappa_2 y_{n-1} = \mu_2 \end{cases} \quad (5.31)$$

Неизвестным в системе (5.31) является вектор  $y = (y_0, y_1, \dots, y_n) \in R^{n+1}$ .

Коэффициенты прямого хода прогонки вычисляются по формулам:

$$\alpha_1 = \kappa_1, \beta_1 = \mu_1$$

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - \alpha_i A_i}, i = 1, n-1, \beta_{i+1} = \frac{\beta_i A_i + \phi_i}{C_i - \alpha_i A_i}, i = 1, n-1$$

Обратный ход прогонки стартует с вычисления  $y_n = \frac{\mu_2 - \kappa_2 \beta_n}{1 - \kappa_2 \alpha_n}$ .

Остальные компоненты искомого вектора  $y \in R^{n+1}$  вычисляются последовательно (от старшего индекса к младшему) по формулам  $y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}, i = n-1, \dots, 0$ .

**Рассмотрим СЛАУ (5.29) как частный случай СЛАУ (5.31).**

В роли  $y \in R^{n+1}$  выступает  $z \in R^{n+1}$ , коэффициентам СЛАУ (5.31) соответствуют

$$A_i = B_i = \frac{12}{h^2}, C_i = \frac{24}{h^2} + 5, i = 1, n-1$$



$$\kappa_1 = \kappa_2 = 0, \mu_1 = \mu_2 = 0, \varphi_i = -\psi_i, i = 1, n-1.$$

Несложно показать, что для (5.29) условия *Теоремы о применения прогонки* выполнены:

$$|A_i| \neq 0; |B_i| \neq 0; |C_i| \geq |A_i| + |B_i|, i = 1, n-1,$$

$$|\kappa_1| = 0 \leq 1; |\kappa_2| = 0 < 1,$$

и при любых  $\psi_i, i = 1, n-1$  СЛАУ (5.29) имеет единственное решение.

**Оценим коэффициенты прямого хода прогонки, затем оценим  $z$  с помощью  $\beta_i, i = 1, n$ , затем получим оценки для  $\beta_i, i = 1, n$  с помощью  $\psi$ , в заключение построим оценку  $z$  с помощью  $\psi$ .**

Для прямого хода прогонки задачи (5.29) справедливо

$$\alpha_1 = 0, \beta_1 = 0, \tag{5.32}$$

$$\alpha_{i+1} = \frac{\frac{12}{h^2}}{\frac{24}{h^2} + 5 - \alpha_i \frac{12}{h^2}} = \frac{1}{2 - \alpha_i + \frac{5}{12} h^2}, i = 1, n-1 \tag{5.33}$$

$$\beta_{i+1} = \frac{\beta_i \frac{12}{h^2} - \psi_i}{\frac{24}{h^2} + 5 - \alpha_i \frac{12}{h^2}} = \frac{\beta_i - \frac{\psi_i h^2}{12}}{2 - \alpha_i + \frac{5h^2}{12}}, i = 1, n-1 \tag{5.34}$$

**При изучении устойчивости схемы (5.2) метод прогонки используется не для решения СЛАУ (5.29), а для оценки  $z$  с помощью  $\psi$ .**

Решение СЛАУ можно представить как

$$z_n = 0, z_i = \alpha_{i+1} z_{i+1} + \beta_{i+1}, i = n-1, \dots, 0, \text{ при этом } z_0 = 0. \tag{5.35}$$

**Оценим компоненты  $z$ , используя значения  $\beta_i, i = 1, n$  и оценки  $|\alpha_i| \leq 1, i = 1, \dots, n$ , гарантированные *Теоремой о применении прогонки*. Так как  $z_n = 0$ , получим**

$$|z_{n-1}| = |\alpha_n z_n + \beta_n| = |\beta_n|$$

$$\begin{aligned} |z_{n-2}| &= |\alpha_{n-1} z_{n-1} + \beta_{n-1}| \leq |\alpha_{n-1}| |z_{n-1}| + |\beta_{n-1}| \leq \\ &\leq |z_{n-1}| + |\beta_{n-1}| \leq |\beta_n| + |\beta_{n-1}| \end{aligned}$$

Для произвольного индекса  $j = n - 3, \dots, 1$ :

$$\begin{aligned}
 |z_j| &= |\alpha_{j+1}z_{j+1} + \beta_{j+1}| \leq |z_{j+1}| + |\beta_{j+1}| \leq \\
 &\leq |\alpha_{j+2}z_{j+2} + \beta_{j+2}| + |\beta_{j+1}| \leq |z_{j+2}| + |\beta_{j+2}| + |\beta_{j+1}| \leq \dots \\
 &\leq |z_n| + |\beta_n| + \dots + |\beta_{j+2}| + |\beta_{j+1}| = |\beta_n| + |\beta_{n-1}| + \dots + |\beta_{j+1}|
 \end{aligned} \tag{5.36}$$

В частности, для индекса  $j = 1$  верно

$$|z_1| = |\alpha_2 z_2 + \beta_2| \leq |z_2| + |\beta_2| \leq |\alpha_3 z_3 + \beta_3| + |\beta_2| \leq |\beta_n| + \dots + |\beta_3| + |\beta_2|$$

**Оценка, справедливая для любого индекса  $j = 1, \dots, n - 1$ , имеет вид**

$$|z_j| \leq \sum_{i=2}^n |\beta_i| \leq (n-1) \cdot \max_{i=2, n} |\beta_i| \tag{5.37}$$

**Оценим  $\beta_i, i = 1, n$ , используя значения компонент  $\psi$ . Запишем (5.34) в виде**

$$\beta_{i+1} = \frac{\beta_i - \frac{\psi_i h^2}{12}}{2 - \alpha_i + \frac{5h^2}{12}} = \frac{\beta_i - \frac{\psi_i h^2}{12}}{1 + \frac{5h^2}{12} + (1 - \alpha_i)}$$

Так как  $1 - \alpha_i \geq 0, i = 1, n$ , и  $h^2 > 0$ , запишем оценку

$$|\beta_{i+1}| = \left| \frac{\beta_i - \psi_i h^2}{1 + \frac{5h^2}{12} + (1 - \alpha_i)} \right| \leq |\beta_i - \psi_i h^2| \leq |\beta_i| + |\psi_i| \cdot h^2 \tag{5.38}$$

Так как  $\beta_1 = 0$ , получим

$$\begin{aligned}
 |\beta_2| &\leq |\beta_1| + |\psi_1| \cdot \frac{h^2}{12} = |\psi_1| \cdot \frac{h^2}{12} \\
 |\beta_3| &\leq |\beta_2| + |\psi_2| \cdot \frac{h^2}{12} \leq |\beta_1| + |\psi_1| \cdot \frac{h^2}{12} + |\psi_2| \cdot \frac{h^2}{12} = |\psi_1| \cdot \frac{h^2}{12} + |\psi_2| \cdot \frac{h^2}{12}
 \end{aligned}$$

Для произвольного индекса  $i = 3, \dots, n$ :

$$\begin{aligned}
|\beta_{i+1}| &\leq |\beta_i| + |\psi_i| \cdot \frac{h^2}{12} \leq |\beta_{i-1}| + |\psi_{i-1}| \cdot \frac{h^2}{12} + |\psi_i| \cdot \frac{h^2}{12} \leq \dots \\
&\leq |\beta_1| + |\psi_1| \cdot \frac{h^2}{12} + |\psi_2| \cdot \frac{h^2}{12} + \dots + |\psi_i| \cdot \frac{h^2}{12} = \\
&= \frac{h^2}{12} \cdot (|\psi_1| + \dots + |\psi_i|)
\end{aligned} \tag{5.39}$$

В частности, для  $i = n$  верно

$$\begin{aligned}
|\beta_n| &\leq |\beta_{n-1}| + |\psi_{n-1}| \cdot \frac{h^2}{12} \leq |\beta_{n-2}| + |\psi_{n-2}| \cdot \frac{h^2}{12} + |\psi_{n-1}| \cdot \frac{h^2}{12} \leq \dots \\
&\leq \frac{h^2}{12} \cdot (|\psi_1| + \dots + |\psi_{n-1}|)
\end{aligned}$$

**Оценка, справедливая для любого индекса  $i = 1, \dots, n$ , имеет вид**

$$|\beta_i| \leq \frac{h^2}{12} \cdot \sum_{s=1}^{n-1} |\psi_s| \leq (n-1) \cdot \frac{h^2}{12} \cdot \max_{s=1, n-1} |\psi_s| \leq \frac{h}{12} \cdot \max_{s=1, n-1} |\psi_s| \tag{5.40}$$

**Оценим компоненты  $z$ , используя значения компонент  $\psi$  и оценки (5.37), (5.40):**

$$|z_j| \leq (n-1) \cdot \max_{i=2, n} |\beta_i| \leq (n-1) \cdot \frac{h}{12} \cdot \max_{s=1, n-1} |\psi_s| \leq \frac{1}{12} \cdot \max_{s=1, n-1} |\psi_s|$$

Таким образом,

$$\max_{j=1, n-1} |z_j| \leq \frac{1}{12} \cdot \max_{s=1, n-1} |\psi_s| \tag{5.41}$$

Так как  $\psi_0 = \psi_n = 0$  и  $z_0 = z_n = 0$ , верно

$$\max_{i=0, n} |z_i| \leq \frac{1}{12} \cdot \max_{i=0, n} |\psi_i|. \tag{5.42}$$

Используя обозначения нормы, (5.42) запишем в виде

$$\|z\|_\infty \leq \frac{1}{12} \cdot \|\psi\|_\infty \tag{5.43}$$

Константа  $C = \frac{1}{12} > 0$  и не зависит от шага сетки. Теорема доказана.

## 5.9. Завершение доказательства сходимости

**Теорема (о сходимости схемы модельной задачи).** Консервативная схема (5.2), построенная для задачи (5.1) методом баланса, сходится с порядком 2:

$$\|z\|_{\infty} \leq Mh^2 \quad (5.44)$$

где  $h$  – шаг сетки,  $M = \frac{1}{12} \cdot \max_{x \in [0,1]} |u^{IV}(x)|$ ,  $M$  не зависит от  $h$ .

**Доказательство:** Из (5.43), (5.25) и (5.20) следует:

$$\|z\|_{\infty} \leq \frac{1}{12} \cdot \|\psi\|_{\infty} \leq \frac{1}{12} \hat{M}h^2 = \frac{1}{12} \cdot \max_{x \in [0,1]} |u^{IV}(x)| \cdot h^2,$$

что и требовалось доказать.

## 5.10. Анализ общей погрешности

Рассмотрим задачу (5.1) и разностную схему (5.2). Напомним, что

$u(x)$ ,  $x \in [0,1]$  есть точное решение задачи (5.1),

$u = (u_0, u_1, \dots, u_n) \in R^{n+1}$  есть точное решение задачи (5.1) в узлах сетки,

$v = (v_0, v_1, \dots, v_n) \in R^{n+1}$  есть точное решение разностной схемы (5.2).

Решение разностной схемы, полученное практически, то есть содержащее в себе погрешность инициализации коэффициентов СЛАУ и погрешность вычислений, обозначим

$$\tilde{v} = (\tilde{v}_0, \tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n) \in R^{n+1}.$$

**Определение. Общей погрешностью** решения задачи (5.1) с помощью разностной схемы (5.2) называют разность точного решения задачи (5.1) и решения разностной схемы (5.2), полученного практически:

$$z^{общ} = u - \tilde{v}, \text{ то есть } z_i^{общ} = u_i - \tilde{v}_i, i = 0, \dots, n$$

**Определение. Вычислительной погрешностью** решения задачи (5.2) называют разность точного решения разностной схемы и решения, полученного практически:

$$z^{en} = v - \tilde{v}, \text{ то есть } z_i^{en} = v_i - \tilde{v}_i, i = 0, \dots, n \quad (5.46)$$

Напомним **определение погрешности схемы**: **погрешность схемы** есть погрешность решения задачи (5.1) с помощью разностной схемы (5.2), то есть разность точного решения (5.1) и точного решения (5.2):

$$z = u - v, \text{ то есть } z_i = u_i - v_i, i = 0, \dots, n. \quad (5.47)$$

Таким образом,

$z = (z_0, z_1, \dots, z_n) \in R^{n+1}$  есть погрешность схемы,

$z^{\text{ен}} = (z_0^{\text{ен}}, z_1^{\text{ен}}, \dots, z_n^{\text{ВП}}) \in R^{n+1}$  есть вычислительная погрешность,

$z^{\text{общ}} = (z_0^{\text{общ}}, z_1^{\text{общ}}, \dots, z_n^{\text{общ}}) \in R^{n+1}$  есть общая погрешность.

**Основные свойства общей погрешности** состоят в том, что:

$$z^{\text{общ}} = u - \tilde{v} = u - v + v - \tilde{v} = z + z^{\text{ен}} \quad (5.47)$$

(общая погрешность есть сумма погрешности схемы и вычислительной погрешности);

$$\|z^{\text{общ}}\| \leq \|z\| + \|z^{\text{ен}}\| \quad (5.48)$$

(норма общей погрешности оценивается сверху суммой норм погрешности схемы и вычислительной погрешности).

### **Выводы**

Пусть  $\varepsilon > 0$  – параметр для контроля общей погрешности (например,  $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-6}$ ).  
Чтобы выполнялось

$$\|z^{\text{общ}}\| \leq \varepsilon$$

шаг сетки  $h$  должен быть достаточно мал (чем он меньше, тем меньше погрешность схемы);

для решения СЛАУ (5.2) должен быть использован вычислительно устойчивый метод (например, прогонка вычислительно устойчива: изолированная вычислительная ошибка в дальнейшем не нарастает);

размерность схемы (5.2), равная  $n + 1$ , не должна быть слишком велика (чем больше уравнений содержит СЛАУ, тем больше арифметических действий нужно выполнить для ее решения и тем больше вычислительная погрешность).

Так как шаг сетки  $h$  и размерность СЛАУ (5.2) связаны:  $h = \frac{1}{n}$ , существует «оптимальный» диапазон значений  $n$ : нужны не слишком малые и не слишком большие значения.

## Модуль 7. Модельные задачи и анализ свойств методов на примере стационарного уравнения теплопроводности

Оценка вычислительной погрешности.

Способы задания граничных условий.

Пример отсутствия сходимости.

Пример сходящейся неоднородной схемы.

Проверка на консервативность

### 7.1. Модельная задача для оценки вычислительной погрешности

Чтобы получить представление о величине вычислительной погрешности, возникающей в ходе решения разностных схем, рассмотрим пример: первая краевая задача для стационарного уравнения теплопроводности имеет вид

$$\begin{cases} 12 \cdot u''(x) - 5 \cdot u(x) = 2110 - 450 \cdot x^2, & x \in [0, 1] \\ u(0) = 10, u(1) = 100 \end{cases} \quad (7.1)$$

где  $k(x) = 12$ ,  $q(x) = 5$ ,  $f(x) = 450 \cdot x^2 - 2110$ ,  $\mu_1 = 10$ ,  $\mu_2 = 100$ ,  $l = 1$ .

Решением задачи является  $u(x) = 10 + 90 \cdot x^2$  (можно проверить подстановкой).

Чтобы построить численное решение, определим на отрезке  $[0; 1]$  сетку с узлами

$x_i = ih, i = 0, n$ . Ее размерность (число участков)  $n$ , шаг  $h = \frac{1}{n}$ .

В соответствии с методом баланса консервативную разностную схему для решения задачи (7.1) строим на основе коэффициентов

$$a_i = \left( \frac{1}{h} \cdot \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \right)^{-1} = 12, \quad i = 1, n$$

$$d_i = \frac{1}{h} \cdot \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} q(x) dx = 5, \quad i = 1, n-1$$

$$\varphi_i = \frac{1}{h} \cdot \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} f(x) dx \approx 450 \cdot x_i^2 - 2110 = \tilde{\varphi}_i \quad i = 1, n-1$$

(для приближенного вычисления интегралов взята формула средних прямоугольников).

Разностная схема принимает вид

$$\begin{cases} 12 \cdot \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2} - 5v_i = 2110 - 450 \cdot x_i^2, & i = 1, n-1, \\ v_0 = 10, v_n = 100 \end{cases} \quad (7.2)$$

и представляет собой СЛАУ с 3-х диагональной матрицей. При любом значении  $n$  (на любой равномерной сетке) решение (7.2) существует и единственно, что вытекает из соответствия СЛАУ условиям *Теоремы о применении прогонки*.

Так как  $u(x) = 10 + 90 \cdot x^2$  является решением дифференциального уравнения, для каждого внутреннего узла  $x_i = ih, i = 1, n-1$  верно

$$12 \cdot u''(x_i) - 5 \cdot u(x_i) = 2110 - 450 \cdot x_i^2, \quad i = 1, n-1 \quad (7.3)$$

В граничных узлах  $x_0 = 0, x_n = 1$  выполняется  $u(x_0) = 10, u(x_n) = 100$ .

Задача (7.1) поставлена так, что для ее решения  $u(x) = 10 + 90 \cdot x^2$  четвертая производная тождественно равна нулю ( $u^{IV}(x) \equiv 0$ ). Поэтому в каждом внутреннем узле сетки, где определен оператор  $[u_{x\bar{x}}]_i$ , значение оператора совпадает со значением второй производной:

$$\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} = u''(x_i), \quad x_i = ih, i = 1, n-1 \quad (7.4)$$

В силу (7.3) и (7.4) для  $u(x) = 10 + 90 \cdot x^2$  верно

$$\begin{cases} 12 \cdot \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} - 5u_i = 2110 - 450 \cdot x_i^2, & i = 1, n-1, \\ u_0 = 10, u_n = 100 \end{cases} \quad (7.5)$$

Сопоставив (7.2) и (7.5), приходим к выводу, что решением (7.2) является вектор  $v = (v_0, v_1, \dots, v_n) \in R^{n+1}$ , такой, что

$$v_i = 10 + 90 \cdot x_i^2, \quad i = 0, n. \quad (7.6)$$

**Решение дифференциальной задачи (7.1) и решение разностной схемы (7.2) в узлах сетки совпадают:**  $v_i = u(x_i) = u_i, i = 0, n$ .

Решая СЛАУ (7.2) методом прогонки, получим вектор  $\tilde{v} = (\tilde{v}_0, \tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n) \in R^{n+1}$ , отличный от вектора  $v = (v_0, v_1, \dots, v_n) \in R^{n+1}$  вследствие погрешности счета.

Далее полагаем, что значения  $10 + 90 \cdot x_i^2$ ,  $i = 0, n$ , будут вычислены точно или пренебрегаем погрешностью их вычисления. *Вычислительную погрешность* решения СЛАУ определим следующим образом:

$$z^{en} = v - \tilde{v}, \quad (7.7)$$

где  $z^{en} = (z_0^{en}, z_1^{en}, \dots, z_n^{en}) \in R^{n+1}$  есть *вычислительная погрешность*;

$v = (v_0, v_1, \dots, v_n) \in R^{n+1}$  есть точное решение схемы (7.2), его можно вычислить по формулам (7.6);

$\tilde{v} = (\tilde{v}_0, \tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n) \in R^{n+1}$  есть решение (7.2), полученное методом прогонки.

Для оценки вычислительной погрешности можно использовать норму  $\| \cdot \|_{\infty}$ . Компьютерный эксперимент покажет зависимость вычислительной погрешности от шага сетки.

### **Комментарии**

**В данном примере погрешность аппроксимации равна нулю:**

$$\psi_0 = u_0 - 10 = 0,$$

$$\psi_n = u_n - 100 = 0,$$

$$\psi_i = 12 \cdot \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} - 5 \cdot u_i - 2110 + 450 \cdot x_i^2 =$$

$$= 12 \cdot \frac{h^2}{24} (u^{IV}(\xi_i) + u^{IV}(\eta_i)) = 0,$$

$$i = 1, n - 1$$

Компоненты вектора погрешности аппроксимации выписаны по определению.

Далее использовано их представление с помощью значений четвертых производных точного решения задачи, вычисленных в некоторых неизвестных средних точках (см. модуль 5).

Затем использовано свойство задачи (7.1), а именно, для  $\forall x$   $u^{IV}(x) = 0$ .

**Погрешность схемы равна нулю:**  $z_i = u_i - v_i = 0$ ,  $i = 0, n$  (это компоненты  $z$  – вектора погрешности схемы).

**Общая погрешность** решения задачи (7.1) с помощью схемы (7.2) **состоит только из вычислительной погрешности:**

$$z^{общ} = u - \tilde{v} = u - v + v - \tilde{v} = z + z^{en} = z^{en}$$



## 7.2. Способы задания граничных условий

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left( k(x) \frac{du}{dx} \right) - q(x)u(x) = -f(x), x \in [a, b] \\ k(x) > 0, x \in [a, b] \\ q(x) \geq 0, x \in [a, b] \end{cases} \quad (7.8)$$

Оно описывает распределение температуры на тонком и однородном в каждом поперечном сечении стержне.

Если на одной из границ отрезка  $[a, b]$  задана температура, данное условие относится к *граничным условиям 1-го рода*; если задан тепловой поток – *граничное условие 2-го рода*; если осуществляется теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона – *граничное условие 3-го рода*.

К *граничным условиям 4-го рода* относятся: условие равенства температур на границе двух сред (торец стержня и окружающая среда), т.е. условие теплового контакта; условие равенства тепловых потоков на границе двух сред (торец стержня и окружающая среда), т.е. *закон теплопроводности*.

Покажем, как записываются граничные условия. **На левой границе отрезка  $[a, b]$ , то есть при  $x = a$ :**

– **граничное условие 1-го рода** (температура) имеет вид  $u(a) = \mu_1$ ;

– **граничное условие 2-го рода** (тепловой поток) имеет вид  $w(a) = M_1$   
(случай  $w(a) = 0$  соответствует теплоизоляции левого торца стержня)

– **граничное условие 3-го рода** (теплообмен) имеет вид  $w(a) = -\gamma_1(u(a) - \theta_1)$   
где  $\theta_1$  температура окружающей среды и  $\gamma_1 > 0$  коэффициент теплообмена.

Тепловой поток связан с температурой как  $w(x) = -k(x)u'(x)$ , поэтому граничные условия 2-го и 3-го рода можно записать через производную температуры

$$k(a)u'(a) = -M_1$$

$$k(a)u'(a) = \gamma_1(u(a) - \theta_1), \text{ где } \gamma_1 > 0.$$

Граничное условие 3-го рода записывают также в виде

$$k(a)u'(a) = \gamma_1 u(a) - \zeta_1, \text{ где } \zeta_1 = \gamma_1 \cdot \theta_1, \gamma_1 > 0.$$

На правой границе отрезка  $[a, b]$ , то есть при  $x = b$ :

– **граничное условие 1-го рода** (температура) имеет вид  $u(b) = \mu_2$ ;

– **граничное условие 2-го рода** (тепловой поток) имеет вид  $w(b) = M_2$   
(случай  $w(b) = 0$  соответствует теплоизоляции правого торца стержня)

– **граничное условие 3-го рода** (теплообмен) имеет вид  $w(b) = -\gamma_2(\theta_2 - u(b))$ , где  $\theta_2$  температура окружающей среды и  $\gamma_2 > 0$  есть коэффициент теплообмена.

Граничные условия 2-го и 3-го рода можно записать через производную температуры

$$k(b)u'(b) = -M_2$$

$$-k(b)u'(b) = \gamma_2(u(b) - \theta_2), \text{ где } \gamma_2 > 0$$

Граничное условие 3-го рода записывают также в виде

$$-k(b)u'(b) = \gamma_2 u(b) - \zeta_2, \text{ где } \zeta_2 = \gamma_2 \cdot \theta_2, \gamma_2 > 0.$$

**При изучении дифференциального уравнения (7.8) соответственно способу задания граничных условий различают краевые задачи:**

**1) первая краевая задача** (задача Дирихле)

$$u(a) = \mu_1$$

$$u(b) = \mu_2$$

**2) вторая краевая задача** (задача Неймана)

$$k(a)u'(a) = -M_1$$

$$k(b)u'(b) = -M_2$$

**3) третья краевая задача**

$$k(a)u'(a) = \gamma_1 u(a) - \zeta_1, \text{ где } \gamma_1 > 0,$$

$$-k(b)u'(b) = \gamma_2 u(b) - \zeta_2, \text{ где } \gamma_2 > 0.$$

Граничные условия

$$u(a) = \mu_1, k(b) \cdot u'(b) = 0$$

означают, что на левом торце стержня задана температура  $\mu_1$ , а правый торец стержня теплоизолирован. Такая краевая задача является **смешанной**.

## Комментарии

Для «разрывной модельной задачи» (см. модуль 4) в точках разрыва параметров поставлены два «граничных» условия 4-го рода: условие теплового контакта  $u_+ = u_-$  и закон теплопроводности  $w_+ = w_-$ . Указанные условия были названы условиями сопряжения.

### 7.3. Пример аппроксимации граничных условий

Построим численный метод решения третьей краевой задачи для стационарного уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left( k(x) \frac{du}{dx} \right) - q(x)u = -f(x), x \in [a, b] \\ k(x) > 0, x \in [a, b] \\ q(x) \geq 0, x \in [a, b] \\ k(a)u'(a) = \gamma_1 u(a) - \zeta_1 \\ -k(b)u'(b) = \gamma_2 u(b) - \zeta_2 \end{cases} \quad (7.9)$$

Для этого определим на отрезке  $[a; b]$  равномерную сетку с узлами  $x_i = a + ih, i = 0, n$ , и дополнительными узлами  $x_{i+0.5} = a + (i + 0.5)h, i = 0, n - 1$ .

Размерность сетки (число участков) равна  $n$ , шаг  $h = \frac{b-a}{n}$ .

Для аппроксимации дифференциального уравнения используем метод баланса и получим уравнения

$$\begin{cases} \frac{v_{i-1} - v_i}{h^2} \cdot a_i - \frac{v_i - v_{i+1}}{h^2} \cdot a_{i+1} - d_i \cdot v_i = -\varphi_i, i = 1, n - 1, \end{cases} \quad (7.10)$$

с коэффициентами

$$a_i = \left( \frac{1}{h} \cdot \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \right)^{-1}, i = 1, n$$

$$d_i = \frac{1}{h} \cdot \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} q(x) dx, i = 1, n - 1$$

$$\varphi_i = \frac{1}{h} \cdot \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} f(x) dx, i = 1, n - 1$$

Для аппроксимации граничных условий применим правый разностный оператор

$$[u_x]_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} \approx u'(x_i),$$

заданный в узлах  $x_i = ih, i = 0, n - 1$ , и левый разностный оператор

$$[u_{\bar{x}}]_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \approx u'(x_i),$$

заданный в узлах  $x_i = ih, i = 1, n$ . Каждый из них пригоден приближенного вычисления первой производной.

Запишем один из операторов (правый) в узле  $x_0 = a$ , другой (левый) – в узле  $x_n = b$ :

$$[u_x]_0 = \frac{u_1 - u_0}{h} \approx u'(x_0)$$

$$[u_{\bar{x}}]_n = \frac{u_n - u_{n-1}}{h} \approx u'(x_n)$$

Заменив в граничных условиях (7.9) значения  $u'(a)$  и  $u'(b)$  на значения указанных выше операторов, на основе (7.10) получим разностную схему

$$\begin{cases} \frac{v_{i-1} - v_i}{h^2} \cdot a_i - \frac{v_i - v_{i+1}}{h^2} \cdot a_{i+1} - d_i \cdot v_i = -\varphi_i, i = 1, n - 1, \\ \frac{v_1 - v_0}{h} \cdot k(x_0) = \gamma_1 \cdot v_0 - \zeta_1 \\ -\frac{v_n - v_{n-1}}{h} \cdot k(x_n) = \gamma_2 \cdot v_n - \zeta_2 \end{cases} \quad (7.11)$$

Точное решение задачи (7.9) в узлах сетки обозначим  $u = (u_0, u_1, \dots, u_n) \in R^{n+1}$ .

Точное решение СЛАУ (7.11) обозначим  $v = (v_0, v_1, \dots, v_n) \in R^{n+1}$ . Рассматриваем  $v$  (решение схемы) как численное решение краевой задачи (7.9).

**Определение.** Погрешностью схемы называют разность точного решения задачи и точного решения схемы в узлах сетки:

$$z = u - v, \text{ где } z_i = u_i - v_i, i = 0, \dots, n.$$

Таким образом, вектор  $z = (z_0, z_1, \dots, z_n) \in R^{n+1}$  есть погрешность схемы.

**Определение.** Погрешностью аппроксимации задачи (7.9) разностной схемой (7.11) называют невязку разностной схемы, при условии, что в нее подставили точное решение дифференциальной задачи, а именно:

$$\begin{cases} \psi_i = \frac{u_{i-1} - u_i}{h^2} \cdot a_i - \frac{u_i - u_{i+1}}{h^2} \cdot a_{i+1} - d_i \cdot u_i + \varphi_i, i = 1, n-1, \\ \psi_0 = \frac{u_1 - u_0}{h} \cdot k(x_0) - \gamma_1 \cdot u_0 + \zeta_1 \\ \psi_n = -\frac{u_n - u_{n-1}}{h} \cdot k(x_n) - \gamma_2 \cdot u_n + \zeta_2 \end{cases} \quad (7.12)$$

Таким образом,  $\psi = (\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n) \in R^{n+1}$  есть погрешность аппроксимации. Компоненты  $\psi_0, \psi_n$  называют погрешностями аппроксимации граничных условий. Компоненты  $\psi_i, i = 1, n-1$  называют погрешностями аппроксимации основного уравнения.

**Основные свойства схемы (7.11) состоят в следующем.**

В случае гладких коэффициентов  $k(x), q(x), f(x)$  погрешность аппроксимации основного уравнения имеет 2-й порядок:  $\psi_i = O(h^2), i = 1, \dots, n-1$ , а погрешность аппроксимации граничных условий имеет 1-й порядок:  $\psi_0 = O(h), \psi_n = O(h)$  (проверить, используя формулу Тейлора).

**Схема сходится с 1-м порядком:** доказательство приведено в учебной литературе.

#### 7.4. Аппроксимация граничных условий методом баланса

Чтобы улучшить сходимость схемы (7.11), нужна более точная аппроксимация граничных условий. Более точные разностные операторы, пригодные для вычисления производных, используют многоточечный шаблон, из-за которого матрица разностной схемы потеряет 3-х диагональную структуру.

**Покажем, как для аппроксимации граничных условий и улучшения сходимости можно использовать метод баланса.**

Рассмотрим граничное условие 3-го рода, заданное на левом конце отрезка:

$$k(a)u'(a) = \gamma_1 u(a) - \zeta_1$$

Дифференциальное уравнение задачи (7.9) проинтегрируем на участке  $[x_0; x_{0.5}]$ :

$$\int_{x_0}^{x_{0.5}} \frac{d}{dx} \left( k(x) \frac{du}{dx} \right) dx - \int_{x_0}^{x_{0.5}} q(x)u(x)dx = - \int_{x_0}^{x_{0.5}} f(x)dx \quad (7.13)$$

(в интегральной форме выписан закон сохранения тепла на участке  $[x_0; x_{0.5}]$ ).

Введем обозначение

$$\varphi_0 = \frac{1}{0.5h} \cdot \int_{x_0}^{x_{0.5}} f(x) dx \quad (7.14)$$

и запишем

$$- \int_{x_0}^{x_{0.5}} f(x) dx = -0.5h \cdot \frac{1}{0.5h} \cdot \int_{x_0}^{x_{0.5}} f(x) dx = -0.5h \cdot \varphi_0$$

Введем обозначение

$$d_0 = \frac{1}{0.5h} \cdot \int_{x_0}^{x_{0.5}} q(x) dx \quad (7.15)$$

и запишем

$$\int_{x_0}^{x_{0.5}} q(x)u(x) dx \approx u(x_0) \int_{x_0}^{x_{0.5}} q(x) dx = 0.5h \cdot d_0 \cdot u_0$$

В уравнении (7.13) присутствует разность тепловых потоков, проходящих через сечения с координатами  $x_0$  и  $x_{0.5}$ : так как  $w(x) = -k(x)u'(x)$ , видим, что

$$\int_{x_0}^{x_{0.5}} \frac{d}{dx} \left( k(x) \frac{du}{dx} \right) dx = - \int_{x_0}^{x_{0.5}} \frac{d}{dx} w(x) dx = w(x_0) - w(x_{0.5})$$

Используя (7.14) и (7.15), аппроксимируем баланс тепла (7.13) уравнением

$$w_0 - w_{0.5} - 0.5h \cdot d_0 \cdot u_0 = -0.5h \cdot \varphi_0, \quad (7.16)$$

Тепловой поток, проходящий через сечение с координатой  $x_{0.5}$ , выразим через разность температур в сечениях с координатами  $x_0$  и  $x_1$  (см. выкладки в модуле 4):

$$w_{0.5} = \frac{u_0 - u_1}{h} a_1 \quad (7.17)$$

Тепловой поток через сечение  $x_0$  получим из граничного условия:

$$w_0 = w(x_0) = w(a) = -k(a)u'(a) = -\gamma_1 u(a) + \zeta_1 = -\gamma_1 u_0 + \zeta_1 \quad (7.18)$$

Подстановкой (7.17) и (7.18) в уравнение (7.16) получим

$$-\gamma_1 u_0 + \zeta_1 - \frac{u_0 - u_1}{h} a_1 - 0.5h \cdot d_0 \cdot u_0 = -0.5h \cdot \varphi_0.$$

После корректировки обозначений, а именно:  $u = (u_0, u_1, \dots, u_n) \in R^{n+1}$  есть точное решение дифференциальной задачи,  
 $v = (v_0, v_1, \dots, v_n) \in R^{n+1}$  есть точное решение разностной схемы,  
сформулируем

**Утверждение 1.** Для граничного условия 3-го рода

$$k(a)u'(a) = \gamma_1 u(a) - \zeta_1,$$

( $k(a) > 0, \gamma_1 > 0$  и  $\zeta_1$  заданы), методом баланса получена аппроксимация

$$\frac{v_1 - v_0}{h} a_1 = (\gamma_1 + 0.5h \cdot d_0) \cdot v_0 - (\zeta_1 + 0.5h \cdot \varphi_0) \quad (7.19)$$

с коэффициентами

$$a_1 = \left( \frac{1}{h} \cdot \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{k(x)} \right)^{-1} \quad d_0 = \frac{1}{0.5h} \cdot \int_{x_0}^{x_{0.5}} q(x) dx \quad \varphi_0 = \frac{1}{0.5h} \cdot \int_{x_0}^{x_{0.5}} f(x) dx \quad (7.20)$$

Интегрирование дифференциального уравнение на участке  $[x_{n-0.5}; x_n]$  и аналогичные выкладки, проведенные на правом конце стержня, позволяют сформулировать

**Утверждение 2.** Для граничного условия 3-го рода

$$-k(b)u'(b) = \gamma_2 u(b) - \zeta_2$$

( $k(b) > 0, \gamma_2 > 0$  и  $\zeta_2$  заданы), методом баланса получена аппроксимация

$$-\frac{v_n - v_{n-1}}{h} a_n = (\gamma_2 + 0.5h \cdot d_n) \cdot v_n - (\zeta_2 + 0.5h \cdot \varphi_n) \quad (7.21)$$

с коэффициентами

$$a_n = \left( \frac{1}{h} \cdot \int_{x_{n-1}}^{x_n} \frac{dx}{k(x)} \right)^{-1} \quad d_n = \frac{1}{0.5h} \cdot \int_{x_{n-0.5}}^{x_n} q(x) dx \quad \varphi_n = \frac{1}{0.5h} \cdot \int_{x_{n-0.5}}^{x_n} f(x) dx \quad (7.22)$$

(Докажите утверждение самостоятельно).

**Консервативную разностную схему** для решения краевой задачи (7.9) записываем в виде

$$\begin{cases} \frac{v_{i-1} - v_i}{h^2} \cdot a_i - \frac{v_i - v_{i+1}}{h^2} \cdot a_{i+1} - d_i v_i = -\varphi_i, i = 1, n-1, \\ \frac{v_1 - v_0}{h} \cdot a_1 = (\gamma_1 + 0.5h \cdot d_0)v_0 - (\zeta_1 + 0.5h \cdot \varphi_0) \\ -\frac{v_n - v_{n-1}}{h} \cdot a_n = (\gamma_2 + 0.5h \cdot d_n) - (\zeta_2 + 0.5h \cdot \varphi_n) \end{cases} \quad (7.23)$$

**Определение. Погрешностью** схемы называют разность точного решения задачи и точного решения схемы в узлах сетки:

$$z = u - v, \text{ где } z_i = u_i - v_i, i = 0, \dots, n.$$

Вектор  $z = (z_0, z_1, \dots, z_n) \in R^{n+1}$  есть погрешность схемы.

**Определение. Погрешностью аппроксимации** называют невязку разностной схемы (7.23), при условии, что в нее подставили точное решение дифференциальной задачи (7.9), а именно:

$$\begin{cases} \psi_i = \frac{u_{i-1} - u_i}{h^2} a_i - \frac{u_i - u_{i+1}}{h^2} a_{i+1} - d_i u_i + \varphi_i, i = 1, n-1, \\ \psi_0 = \frac{u_1 - u_0}{h} \cdot a_1 - (\gamma_1 + 0.5h \cdot d_0)u_0 + (\zeta_1 + 0.5h \cdot \varphi_0) \\ \psi_n = \frac{u_n - u_{n-1}}{h} \cdot a_n - (\gamma_2 + 0.5h \cdot d_n)u_n + (\zeta_2 + 0.5h \cdot \varphi_n) \end{cases} \quad (7.24)$$

Таким образом,  $\psi = (\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n) \in R^{n+1}$  есть погрешность аппроксимации. Компоненты  $\psi_0, \psi_n$  называют погрешностями аппроксимации граничных условий (на левом и правом концах отрезка соответственно). Компоненты  $\psi_i, i = 1, n-1$  называют погрешностями аппроксимации основного уравнения.

**Свойство схемы (7.23) состоит в следующем.**

В случае гладких коэффициентов  $k(x), q(x), f(x)$  погрешность аппроксимации основного уравнения имеет 2-й порядок:  $\psi_i = O(h^2), i = 1, \dots, n-1$ ; погрешность аппроксимации граничных условий также имеет 2-й порядок:  $\psi_0 = O(h^2), \psi_n = O(h^2)$ .

Схему (7.23) называют схемой с улучшенной аппроксимацией граничных условий.

**Схема сходится со 2-м порядком:** доказательство приведено в учебной литературе.



### Комментарии

Свойства схемы (7.23) обеспечены внесением малых поправок в схему (7.11):

– поправки  $0.5h \cdot d_0$ ,  $0.5h \cdot \varphi_0$  и поправка  $a_1 - k(x_0)$  на левом конце отрезка;

– поправки  $0.5h \cdot d_n$ ,  $0.5h \cdot \varphi_n$  и поправка  $a_n - k(x_n)$  на правом конце отрезка.

Разработка схемы (7.23) не потребовала изменения шаблонов: СЛАУ (7.23) является 3-х диагональной.

### 7.5. Пример отсутствия сходимости

Под сходимостью схемы понимают сходимость решений разностной схемы к решению исходного уравнения.

Приведем пример, когда решение разностной схемы при сгущении сетки ( $n \rightarrow +\infty$ ) сходится к некоторой функции, но эта предельная функция не является решением дифференциального уравнения.

В таких случаях говорят, что схема расходится.

Рассмотрим первую краевую задачу

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left( k(x) \frac{du}{dx} \right) = 0, x \in (0,1) \\ u(0) = 1, u(1) = 0 \\ k(x) = \begin{cases} 2, x \in [0, \xi) \\ 1, x \in [\xi, 1] \end{cases} \\ u_- = u_+, w_- = w_+ \end{cases} \quad (7.25)$$

Несложно проверить, что решением (7.25) является кусочно-линейная функция

$$u(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2 - \xi} x, x \in [0, \xi] \\ \frac{2}{2 - \xi} (1 - x), x \in [\xi, 1] \end{cases}$$

которая соответствует условиям сопряжения. Действительно,

$$u_- = \lim_{x \rightarrow \xi - 0} \left( 1 - \frac{1}{2 - \xi} x \right) = \frac{2 - 2\xi}{2 - \xi}$$

$$u_+ = \lim_{x \rightarrow \xi + 0} \left( \frac{2}{2 - \xi} (1 - x) \right) = \frac{2 - 2\xi}{2 - \xi}$$

$$w_- = \lim_{x \rightarrow \xi-0} \left( -2 \cdot \left( 1 - \frac{1}{2-\xi} x \right)' \right) = -\frac{2}{2-\xi}$$

$$w_+ = \lim_{x \rightarrow \xi+0} \left( -1 \cdot \left( \frac{2}{2-\xi} (1-x) \right)' \right) = -\frac{2}{2-\xi}$$

Таким образом,  $u_- = u_+$ ,  $w_- = w_+$ , температура  $u(x)$  и тепловой поток  $w(x)$  при  $x \in [0,1]$  непрерывны и в точке  $\xi$  принимают значения

$$u(\xi) = \frac{2-2\xi}{2-\xi} \qquad w(\xi) = -\frac{2}{2-\xi}$$

Чтобы привести пример схемы, которая расходится, предположим, что разрыв функции  $k(x)$  имеет место в точке  $\xi \in (0,1)$ , где  $\xi$  – иррациональное число, и построим на отрезке  $[0;1]$  равномерную сетку с узлами  $x_i = ih$ ,  $i = 0, n$ , где шаг сетки  $h = \frac{1}{n}$ .

Число  $\xi \in (0,1)$ , являясь иррациональным, ни при каком  $n$  не будет узлом сетки.

Для дифференциального оператора задачи (7.25) при любом  $x \neq \xi$  верно

$$(k(x)u'(x))' = k'(x)u'(x) + k(x)u''(x) \tag{7.26}$$

Используя (7.26), аппроксимируем дифференциальный оператор:

$$(k'u' + ku'')|_{x=x_i} \approx [k_{\dot{x}}]_i [u_{\dot{x}}]_i + k(x_i) [u_{x\bar{x}}]_i \tag{7.27}$$

В (7.27) использованы центральные разностные операторы для вычисления первой и второй производных. Так как в каждом внутреннем узле  $x_i = ih$ ,  $i = 1, n-1$  для решения задачи (7.25) выполняется

$$(k'u' + ku'')|_{x=x_i} = 0,$$

рассмотрим разностную схему

$$\begin{cases} \frac{k_{i+1} - k_{i-1}}{2h} \cdot \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2h} + k_i \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2} = 0, i = 1, n-1 \\ v_0 = 1, v_n = 0 \end{cases} \tag{7.28}$$

Пусть при некотором значении  $n$  (число участков сетки) точка  $\xi$  попадает в интервал  $(x_s, x_{s+1})$ . Тогда  $k_0 = k_1 = \dots = k_s = 2$  и  $k_{s+1} = k_{s+2} = \dots = k_n = 1$ .

Схема (7.28) принимает вид

$$\left\{ \begin{array}{l} v_0 = 1 \\ 2 \cdot \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2} = 0, i = 1, s-1 \\ \frac{(1-2)}{2h} \cdot \frac{v_{s+1} - v_{s-1}}{2h} + 2 \cdot \frac{v_{s-1} - 2v_s + v_{s+1}}{h^2} = 0, \\ \frac{(1-2)}{2h} \cdot \frac{v_{s+2} - v_s}{2h} + \frac{v_s - 2v_{s+1} + v_{s+2}}{h^2} = 0, \\ \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2} = 0, i = s+2, n \\ v_n = 0 \end{array} \right. \quad (7.29)$$

При любом значении  $n$  решение схемы (7.29) **существует и единственно**. (Потому что выполняются условия *Теоремы о применении прогонки*).

При конкретном значении  $n$  найдем решение (7.29), то есть найдем вектор  $v = (v_0, v_1, \dots, v_n) \in R^{n+1}$ .

Затем рассмотрим предельное численное решение  $\bar{v}(x)$ , формирующееся при  $n \rightarrow \infty$ .

Для этого, во-первых, выделим из (7.29) уравнения

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2} = 0, i = 1, s-1 \\ \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2} = 0, i = s+2, n \end{array} \right.$$

Они показывают, что решение (7.29) должно быть линейной функцией на участке  $[x_0, x_s]$  и линейной функцией на участке  $[x_{s+1}, x_n]$ .

С учетом того, что  $v_0 = 1$  и  $v_n = 0$ , компоненты вектора  $v = (v_0, v_1, \dots, v_n) \in R^{n+1}$  можно найти в виде

$$v_i = \begin{cases} 1 - \alpha^{(n)} x_i, & i = 0, s, \\ \beta^{(n)} (1 - x_i), & i = s+1, n \end{cases} \quad (7.30)$$

(потому что  $v_0 = 1 - \alpha^{(n)} x_0 = 1$  и  $v_n = \beta^{(n)} (1 - x_n) = 0$ ).

Запишем оставшиеся два уравнения схемы (7.29), а именно:

$$\begin{cases} -\frac{v_{s+1} - v_{s-1}}{4h^2} + 2 \cdot \frac{v_{s-1} - 2v_s + v_{s+1}}{h^2} = 0, \\ -\frac{v_{s+2} - v_s}{4h^2} + \frac{v_s - 2v_{s+1} + v_{s+2}}{h^2} = 0 \end{cases} \quad (7.31)$$

Используем (7.30) и для индексов  $i = s - 1, s, s + 1, s + 2$  запишем

$$\begin{aligned} v_{s-1} &= 1 - \alpha^{(n)} x_{s-1}, & v_s &= 1 - \alpha^{(n)} x_s \\ v_{s+1} &= \beta^{(n)} (1 - x_{s+1}) & v_{s+2} &= \beta^{(n)} (1 - x_{s+2}). \end{aligned}$$

Тогда на основе (7.31) получим два уравнения для коэффициентов  $\alpha^{(n)}$  и  $\beta^{(n)}$ :

$$\begin{cases} \alpha^{(n)} = \frac{1 - \beta^{(n)} (1 - x_{s+1})}{\frac{16}{7} \cdot h + x_{s-1}}, \\ 1 - \alpha^{(n)} \cdot x_s = \beta^{(n)} \cdot (1 - x_{s+1}) \end{cases}$$

Если значение  $n$  задано, решением являются коэффициенты

$$\alpha^{(n)} = 0 \quad \beta^{(n)} = \frac{1}{1 - x_{s+1}}.$$

**Утверждение.** Если значение  $n$  задано и точка  $\xi$  попадает в интервал  $(x_s, x_{s+1})$ , решением схемы (7.29) является  $v = (v_0, v_1, \dots, v_n) \in R^{n+1}$  такой, что

$$v_i = \begin{cases} 1, & i = 0, s, \\ \frac{1}{1 - x_{s+1}} \cdot (1 - x_i), & i = s + 1, n \end{cases} \quad (7.32)$$

**Следствие.** При сгущении сетки, т.е. при  $n \rightarrow \infty$ , существуют предельные значения

$$\bar{\alpha} = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^{(n)} = 0, \quad \bar{\beta} = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta^{(n)} = \frac{1}{1 - \xi}$$

**Пределом численных решений при  $n \rightarrow \infty$  является кусочно-линейная функция**

$$\bar{v}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, \xi] \\ \frac{1}{1 - \xi} (1 - x), & x \in [\xi, 1] \end{cases} \quad (7.33)$$

## Выводы

1) Решение разностной схемы сходится к функции, не являющейся решением исходной задачи:  $\bar{v}(x) \neq u(x)$ .

2) Предельное численное решение  $\bar{v}(x)$  соответствует условию теплового контакта

$$\bar{v}_+ = \bar{v}_- :$$

$$\bar{v}_- = \lim_{x \rightarrow \xi - 0} \bar{v}(x) = \lim_{x \rightarrow \xi - 0} (1) = 1$$

$$\bar{v}_+ = \lim_{x \rightarrow \xi + 0} \bar{v}(x) = \lim_{x \rightarrow \xi + 0} \left( \frac{1}{1 - \xi} (1 - x) \right) = \frac{1 - \xi}{1 - \xi} = 1$$

(температура непрерывна).

3) Предельное численное решение  $\bar{v}(x)$  не соответствует закону теплопроводности

$$\bar{w}_+ = \bar{w}_- . \text{ Действительно,}$$

слева от точки  $\xi \in (0,1)$  тепловой поток отсутствует:

$$\bar{w}_- = \lim_{x \rightarrow \xi - 0} (-k(x)\bar{v}'(x)) = \lim_{x \rightarrow \xi - 0} (-2 \cdot (1)') = 0$$

справа от точки  $\xi \in (0,1)$  тепловой поток составит

$$\bar{w}_+ = \lim_{x \rightarrow \xi + 0} (-k(x)\bar{v}'(x)) = \lim_{x \rightarrow \xi + 0} \left( -1 \cdot \left( \frac{1}{1 - \xi} (1 - x) \right)' \right) = \frac{1}{1 - \xi}$$

4) Предельному численному решению соответствует расположенный в точке  $\xi \in (0,1)$  точечный источник тепла с положительной мощностью

$$\bar{w}_+ - \bar{w}_- = \frac{1}{1 - \xi} > 0 \tag{7.34}$$

5) Схема расходится.

## Задание

1) Объясните, что не учтено при построении схемы (7.29).

2) Напишите консольное приложение для проверки того, что схема расходится.

## 7.6. Пример сходящейся неоднородной схемы

Разностная схема называется **однородной**, если запись схемы, разработанной для решения некоторого класса задач, не зависит от выбора задачи из указанного класса и не зависит от выбора сетки. Во всех узлах сетки разностные уравнения однородной схемы записываются одинаково. Разностная схема, построенная методом баланса, является **однородной** (см. модуль 4).

Приведем пример **сходящейся неоднородной схемы**. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left( k(x) \frac{du}{dx} \right) - q(x)u(x) = -f(x), & x \in (0,2) \\ u(0) = 13 \\ u(2) = 19 \end{cases} \quad (7.35)$$

$$k(x) = \begin{cases} 3, & x \in (0, \xi) \\ 7, & x \in (\xi, 2) \end{cases} \quad q(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0, \xi) \\ 5, & x \in (\xi, 2) \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} 10, & x \in (0, \xi) \\ -15, & x \in (\xi, 2) \end{cases}$$

В точке разрыва  $\xi = 0.4$  указываются условия сопряжения.

При  $x < \xi$  дифференциальное уравнение задачи (7.35) имеет вид

$$\begin{cases} 3 \cdot \frac{d^2 u}{dx^2} = -10, & x \in (0, \xi) \\ u(0) = 13 \end{cases}$$

При  $x > \xi$  дифференциальное уравнение задачи (7.35) имеет вид

$$\begin{cases} 7 \cdot \frac{d^2 u}{dx^2} - 5 \cdot u(x) = 15, & x \in (\xi, 2) \\ u(2) = 19 \end{cases}$$

При  $x = \xi$  поставлены условия теплового контакта  $u_- = u_+$ , где

$$u_- = \lim_{x \rightarrow \xi - 0} u(x) \quad u_+ = \lim_{x \rightarrow \xi + 0} u(x)$$

и записан закон теплопроводности  $w_- = w_+$ , где

$$w_- = \lim_{x \rightarrow \xi - 0} (-3 \cdot u'(x)) \quad w_+ = \lim_{x \rightarrow \xi + 0} (-7 \cdot u'(x))$$

Для решения (7.35) построим на отрезке  $[0;2]$  равномерную сетку с узлами

$x_i = ih, i = 0, n$ , где шаг сетки  $h = \frac{2}{n}$ . Число  $n$  выбираем так, чтобы точка  $\xi = 0.4$  совпадала с узлом сетки, такой узел обозначим  $x_s$ .

Очевидно, что при  $x_i < x_s$  и при  $x_i > x_s$  разностный оператор  $[u_{xx}]_i$  аппроксимирует вторую производную  $u''(x_i)$  с порядком 2:

$$\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} \approx u''(x_i), \quad x_i = ih, i = 1, n-1, i \neq s$$

Поэтому разностные уравнения

$$\begin{cases} 3 \cdot \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2} = -10, & i = 1, \dots, s-1 \\ 7 \cdot \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2} - 5v_i = 15, & i = s+1, \dots, n \end{cases}$$

аппроксимируют дифференциальное уравнение (7.35) при значениях  $x$  левее и правее точки разрыва, аппроксимация с порядком 2.

Разностное уравнение

$$-3 \cdot \frac{v_s - v_{s-1}}{h} = -7 \cdot \frac{v_{s+1} - v_s}{h}$$

аппроксимирует условие  $w_+ = w_-$  (использованы левый и правый разностные операторы для аппроксимации предельных слева и справа значений производной в точке  $\xi = 0.4$ ). Данная аппроксимация имеет 1-й порядок.

Учитываем граничные условия и записываем схему:

$$\begin{cases} v_0 = 13 \\ 3 \cdot \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2} = -10, & i = 1, \dots, s-1 \\ -3 \cdot \frac{v_s - v_{s-1}}{h} = -7 \cdot \frac{v_{s+1} - v_s}{h}, & i = s \\ 7 \cdot \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{h^2} - 5v_i = 15, & i = s+1, \dots, n \\ v_n = 19 \end{cases} \quad (7.36)$$

Схема (7.36) применяется на равномерных сетках, для которых точка  $\xi = 0.4$  является узлом сетки:  $\xi = x_s$ .

**Утверждение 1.** При любом значении  $n$  решение схемы (7.36) **существует и единственно**. (Доказательство следует из выполнения условий *Теоремы о применении прогонки*).

**Утверждение 2.** Схема (7.36) **сходится с 1-м порядком**. (Доказательство провести самостоятельно).

### Задание

Объясните, почему схема (7.36) не классифицируется как однородная.

## 7.7. Проверка на консервативность. Дисбаланс

Рассмотрим первую краевую задачу

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left( k(x) \frac{du}{dx} \right) - q(x)u = -f(x) \\ u(a) = \mu_1, u(b) = \mu_2 \end{cases} \quad (7.37)$$

решением которой является функция  $u(x)$ ,  $x \in [a, b]$ . Коэффициенты  $k(x)$ ,  $q(x)$ ,  $f(x)$  и значения  $\mu_1$  и  $\mu_2$  считаем заданными, они соответствуют условиям

$$\begin{cases} k(x) > 0, x \in [a, b] \\ q(x) \geq 0, x \in [a, b] \end{cases}$$

На отрезке  $[a, b]$  строим равномерную сетку с узлами  $x_i = a + ih$ ,  $i = 0, n$ , и дополнительными узлами  $x_{i+0.5} = a + (i + 0.5)h$ ,  $i = 0, n - 1$ . Размерность сетки равна  $n$ , шаг сетки  $h = \frac{b-a}{n}$ .

Интегрируем основное уравнение задачи (7.37) на участке  $[x_{0.5}; x_{n-0.5}]$ :

$$\int_{x_{0.5}}^{x_{n-0.5}} \frac{d}{dx} \left( k(x) \frac{du}{dx} \right) dx - \int_{x_{0.5}}^{x_{n-0.5}} q(x)u(x) dx + \int_{x_{0.5}}^{x_{n-0.5}} f(x) dx = 0 \quad (7.38)$$

Это уравнение представляет собой запись закона сохранения тепла на участке  $[x_{0.5}; x_{n-0.5}]$  в интегральной форме.

Первый из интегралов вычислим, используя формулы теплового потока (см. модуль 4), следующие два интеграла запишем как сумму интегралов по участкам  $[x_{i-0.5}; x_{i+0.5}]$

$$w(x_{0.5}) - w(x_{n-0.5}) + \sum_{i=1}^{n-1} \left( - \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} q(x)u(x) dx + \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} f(x) dx \right) = 0 \quad (7.39)$$

Используя обозначение



$$\varphi_i = \frac{1}{h} \cdot \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} f(x) dx, \quad i = 1, n-1 \quad (7.40)$$

для каждого из участков  $[x_{i-0.5}; x_{i+0.5}]$  запишем

$$- \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} f(x) dx = -h \cdot \frac{1}{h} \cdot \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} f(x) dx = -\varphi_i h.$$

Используя обозначение

$$d_i = \frac{1}{h} \cdot \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} q(x) dx, \quad i = 1, n-1 \quad (7.41)$$

для каждого из участков  $[x_{i-0.5}; x_{i+0.5}]$  запишем

$$\int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} q(x)u(x) dx \approx u(x_i) d_i h$$

Используя построенную ранее разностную аппроксимацию функции теплового потока

$$w_{i-0.5} = \frac{u_{i-1} - u_i}{h} a_i, \quad i = 1, n, \quad \text{где } a_i = \left( \frac{1}{h} \cdot \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \right)^{-1}, \quad i = 1, n, \quad (7.42)$$

перепишем (7.39) в виде

$$\frac{u_0 - u_1}{h} a_1 - \frac{u_{n-1} - u_n}{h} a_n + h \sum_{i=1}^{n-1} (-d_i u_i + \varphi_i) = 0 \quad (7.43)$$

Уравнение (7.43) является разностным аналогом закона сохранения тепла на отрезке  $[x_{0.5}; x_{n-0.5}]$ .

**Определение.** Пусть  $\hat{v} \in R^{n+1}$  есть численное решение задачи (7.37), полученное с помощью некоторой разностной схемы, заданной на сетке с узлами  $x_i = a + ih, i = 0, n$ , и дополнительными узлами  $x_{i+0.5} = a + (i + 0.5)h, i = 0, n-1$ . Величину

$$R = \frac{\hat{v}_0 - \hat{v}_1}{h} a_1 - \frac{\hat{v}_{n-1} - \hat{v}_n}{h} a_n + h \sum_{i=1}^{n-1} (-d_i \hat{v}_i + \varphi_i) \quad (7.44)$$

с коэффициентами (7.40)-(7.42), называют **дисбалансом схемы**.

**Утверждение.** Дисбаланс схемы (4.14), построенной методом баланса с целью численного решения задачи (7.37), равен нулю:  $R = 0$ .

**Доказательство.** Пусть  $v \in R^{n+1}$  есть численное решение задачи (7.37), полученное с помощью (4.14). Дисбалансом схемы является число

$$R = \frac{v_0 - v_1}{h} a_1 - \frac{v_{n-1} - v_n}{h} a_n + h \sum_{i=1}^{n-1} (-d_i v_i + \varphi_i).$$

где коэффициенты заданы формулами (7.40)-(7.42). Коэффициенты схемы (4.14) совпадают с коэффициентами (7.40)-(7.42) для расчета  $R$ . Вектор  $v \in R^{n+1}$  удовлетворяет каждому из уравнений (4.14). Просуммировав уравнения (4.14), получим  $R = 0$ .

### **Комментарии**

**Дисбаланс и его свойства, проявляющиеся при сгущении сетки, используются при проверке схемы на консервативность.** Если  $R = 0$ , схема называется консервативной. Малые значения  $R$ , стремящиеся к нулю при сгущении сетки, не мешают сходимости.

При решении прикладных задач рекомендуется использовать консервативные схемы.

## ЛИТЕРАТУРА

### а) литература по тематическому блоку

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – 7-е изд. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. – 636 с.
2. Вержбицкий В.М. Основы численных методов. - М.: Высшая школа, 2002. – 840 с.
3. Гавурин М.К. Лекции по методам вычислений. М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1971. – 248 с.
4. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980. – 536 с.
5. Разностные схемы в задачах газовой динамики на неструктурированных сетках / Под ред. проф. В.Н. Емельянова, д.ф.-м.н. К.Н. Волкова. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2015. – 416 с.
6. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989. – 616 с.
7. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения задач конвекции-диффузии. – М.: Книжный дом «Либроком», 2015. – 248 с.
8. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: Изд-во ЛКИ, 2014. – 480 с.
9. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы математической физики. М.: Научный мир, 2000. – 316 с.
10. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1953. – 680 с.
11. Трифонов Н.П., Пасхин Е.Н. Компьютерный практикум на ЭВМ. М.: Изд-во МГУ, 1980. – 287 с.
12. Стронгина Н.Р., Баркалов К.А. Численные методы. Семестр 7. ЭУК, учебно-методический комплекс. Фонд электронных образовательных ресурсов ННГУ. Н. Новгород, 2014. Ид.н. 815Е.14.08.
13. Параллельные вычисления: технологии и численные методы: Учебное пособие в 4-х томах. Авторы: Гергель В.П., Баркалов К.А., Мееров И.Б. и др. Том 1.– Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского университета, 2013. – 367 с.
14. Практические приложения численных методов линейной алгебры. Учебно-методический комплекс для поддержки общего курса «Численные методы» (направление «Прикладная математика и информатика»). Результаты образовательного проекта лаборатории «Информационные технологии» факультета ВМК ННГУ (отчет). Авторы: Стронгина Н.Р., Балабанов А.С., Баркалов К.А., Ирхина А.Л., Федоткин А.М., Юсов Е.А. / Под ред. Н.Р. Стронгиной. - Н. Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2004. – 281 с.

#### **б) литература об организации учебного процесса по дисциплине**

15. Садовничий В.А. Международный форум «Университеты, общество и будущее человечества». Доклад ректора МГУ имени М.В. Ломоносова академика В.А. Садовниченко на Международном форуме «Университеты, общество и будущее человечества» 25 марта 2019 года. М.: Издательство Московского университета, 2019. – 36 с.
16. Высокпроизводительные параллельные вычисления. 100 заданий для расширенного лабораторного практикума. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2018. – 248 с.
17. Программы дисциплин по направлению «Прикладная математика и информатика». Учебно-методическое объединение Университетов. Учебно-методический совет по прикладной математике и информатике. М.: Изд-во факультета ВМиК МГУ, 2002. С. 59 – 62.
18. Стронгина Н.Р. Цифровизация и качество обучения на примере фундаментальной дисциплины «Численные методы» // Научные вести. 2021. №2 (31). – С. 85 – 103.

## **ПРИЛОЖЕНИЕ**

Материалы для описания подхода  
параллельной реализации метода прогонки

|    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0  | ■ | ■ |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 1  | ■ | ■ | ■ |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 2  |   | ■ | ■ | ■ |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 3  |   |   | ■ | ■ | ■ |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 4  |   |   |   | ■ | ■ | ■ |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 5  |   |   |   |   | ■ | ■ | ■ |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 6  |   |   |   |   |   | ■ | ■ | ■ |   |   |   |   |   |   |   |
| 7  |   |   |   |   |   |   | ■ | ■ | ■ |   |   |   |   |   |   |
| 8  |   |   |   |   |   |   |   | ■ | ■ | ■ |   |   |   |   |   |
| 9  |   |   |   |   |   |   |   |   | ■ | ■ | ■ |   |   |   |   |
| 10 |   |   |   |   |   |   |   |   |   | ■ | ■ | ■ |   |   |   |
| 11 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   | ■ | ■ | ■ |   |   |
| 12 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   | ■ | ■ | ■ |   |
| 13 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   | ■ | ■ | ■ |
| 14 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   | ■ | ■ |
| 15 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   | ■ |

|     |
|-----|
| Y0  |
| Y1  |
| Y2  |
| Y3  |
| Y4  |
| Y5  |
| Y6  |
| Y7  |
| Y8  |
| Y9  |
| Y10 |
| Y11 |
| Y12 |
| Y13 |
| Y14 |
| Y15 |

**Параллельная реализация метода прогонки**

Дано: СЛАУ с 3-х диагональной матрицей, размерность 16\*16 (n=15).

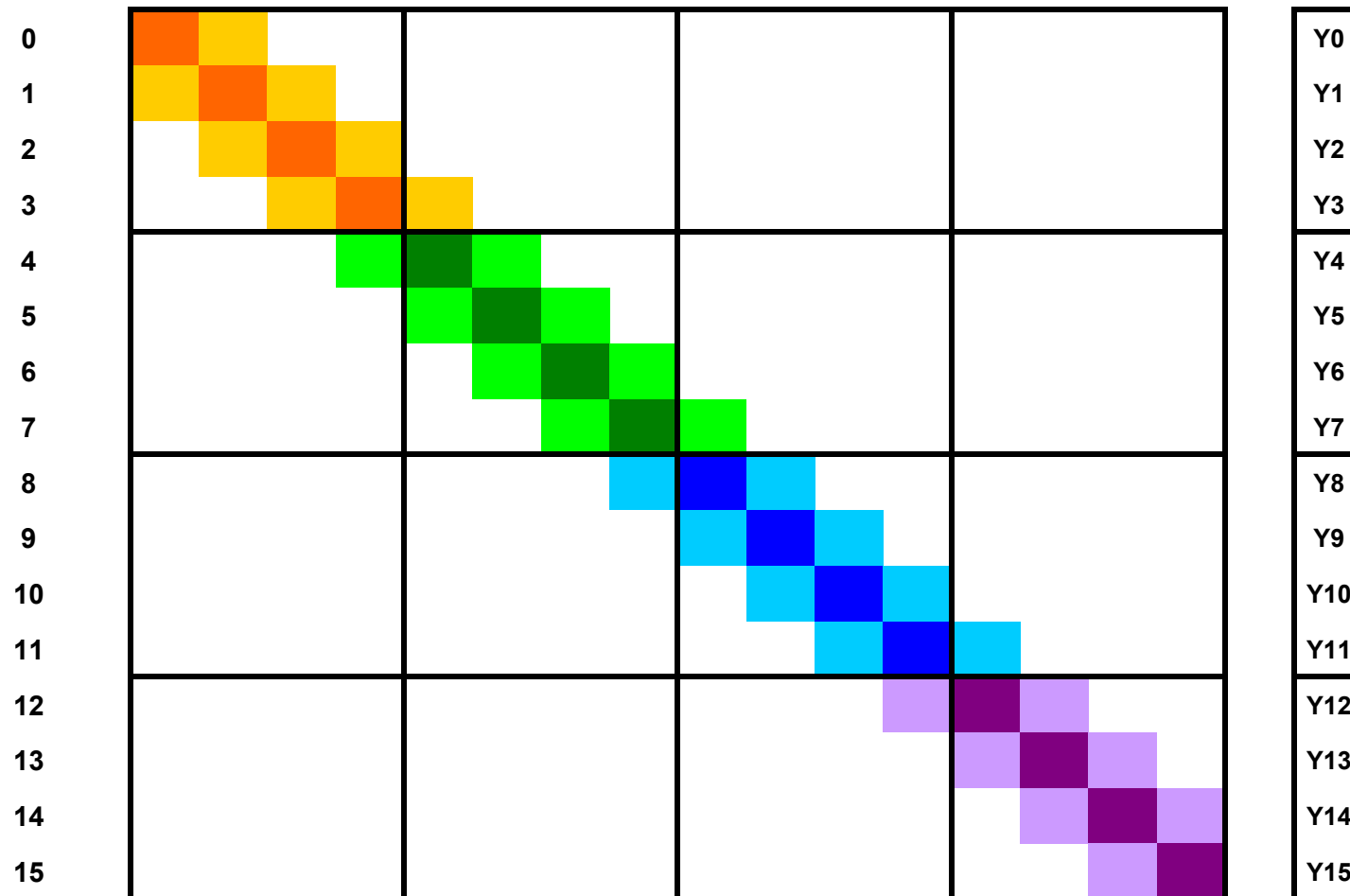
Вектор неизвестных  $Y = (Y_0, Y_1, \dots, Y_{15})$  размерности 16.

Правую часть СЛАУ не выписываем.

Элементы матрицы, равные нулю, бесцветны.

Серым отмечены элементы, которые могут принимать ненулевые значения.

Это элементы ГЛАВНОЙ диагонали, НИЖНЕЙ под-диагонали и ВЕРХНЕЙ над-диагонали.



|     |
|-----|
| Y0  |
| Y1  |
| Y2  |
| Y3  |
| Y4  |
| Y5  |
| Y6  |
| Y7  |
| Y8  |
| Y9  |
| Y10 |
| Y11 |
| Y12 |
| Y13 |
| Y14 |
| Y15 |

Пусть *Параллельная вычислительная система (ПВС)* содержит 4 *Вычислительных узла (ВУ)*.

Поручим каждому узлу решить 4 уравнения и найти 4 неизвестных.

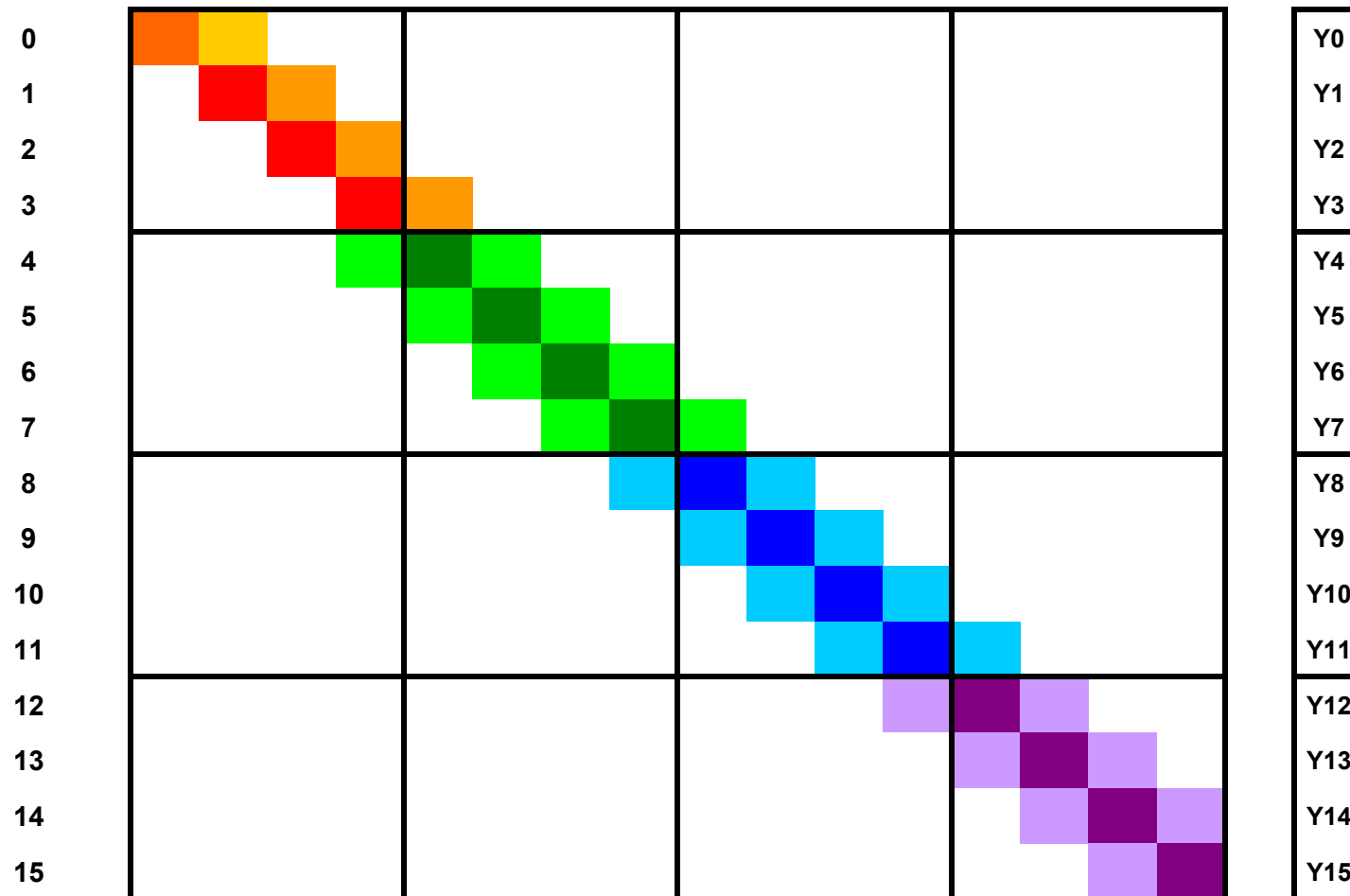
ВУ №1 отвечает за Y0, Y1, Y2, Y3 и решает уравнения в строках 0, 1, 2, 3 (красный блок).

ВУ №2 отвечает за Y4, Y5, Y6, Y7 и решает уравнения в строках 4, 5, 6, 7 (зеленый блок).

ВУ №3 должен найти Y8, Y9, Y10, Y11, используя уравнения в строках 8, 9, 10, 11 (синий блок).

ВУ №4 найдет Y12, Y13, Y14, Y15, используя уравнения в строках 12, 13, 14, 15 (фиолетовый блок).

При таком раскладе *параллельное исполнение программы невозможно*, так как ВУ №1 должен использовать значение Y4, за которое отвечает ВУ №2; ВУ №2 должен знать Y3 и Y8, за которые отвечают ВУ №1 и ВУ №3 и т.д.



Подготовим СЛАУ для параллельной работы. Покажем, что должен сделать **ПЕРВЫЙ** вычислит. узел (ВУ №1)

Цель: получить **НУЛИ** (обнулить элементы матрицы) на НИЖНЕЙ под-диагонали **красного блока**.

А затем получить **НУЛИ** (обнулить элементы) на ВЕРХНЕЙ над-диагонали **красного блока**.

**Уравнение в строке 0** остается без изменений.

Идем сверху вниз.

**Новое** уравнение в строке 1 = **Старое** уравнение в строке 1 - Коэффициент 1 \* Уравнение в строке 0.

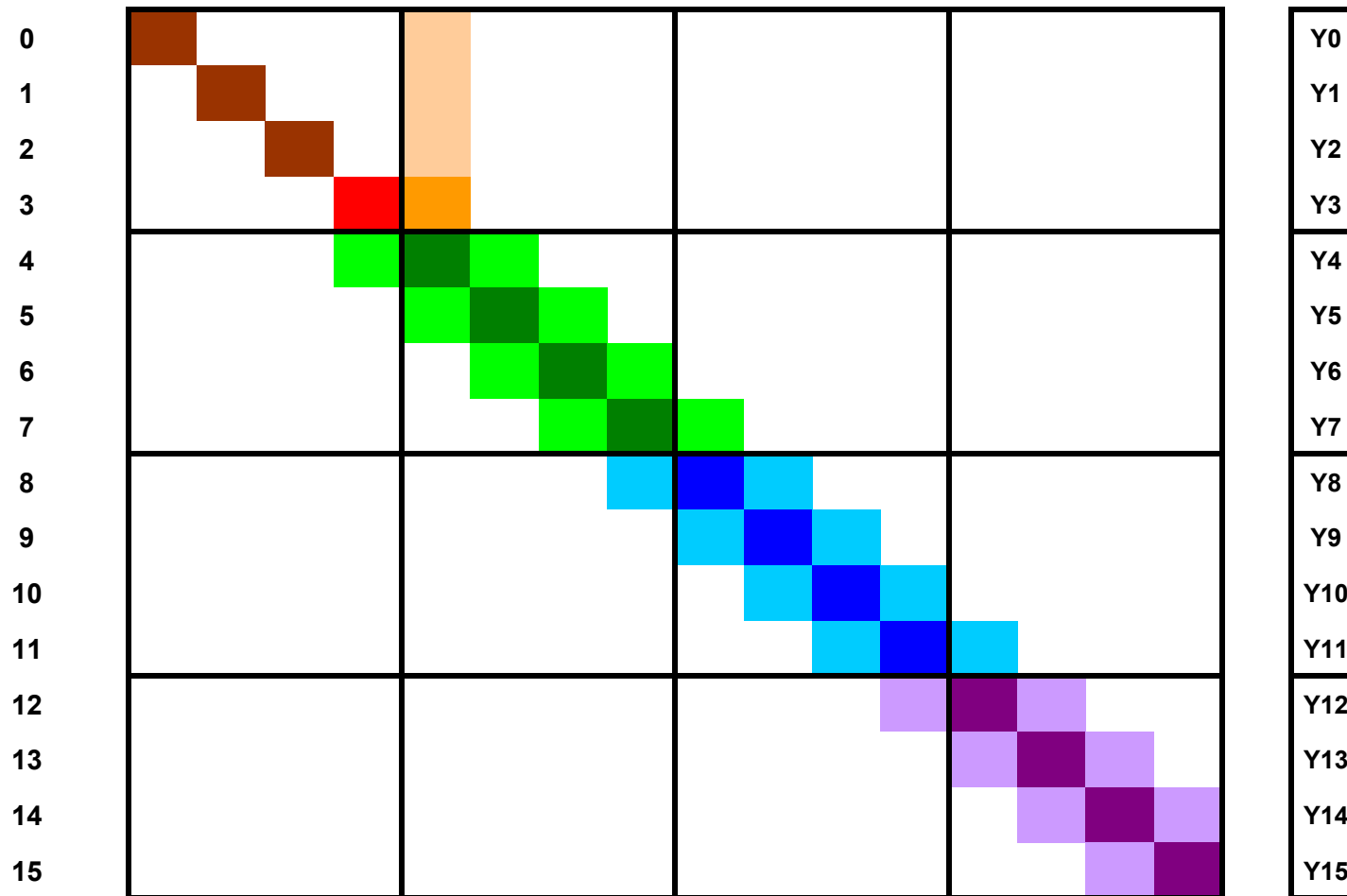
**Новое** уравнение в строке 2 = **Старое** уравнение в строке 2 - Коэффициент 2 \* **Новое** уравнение в строке 1.

**Новое** уравнение в строке 3 = **Старое** уравнение в строке 3 - Коэффициент 3 \* **Новое** уравнение в строке 2.

Коэффициенты вычисляются как в методе Гаусса (чтобы обнулить нужный элемент).

**Аналогично преобразовывают ПРАВЫЕ ЧАСТИ** каждого из 4-х уравнений. В результате **НУЛЕЙ "снизу" нет.**





Далее получим **НУЛИ** на **ВЕРХНЕЙ** над-диагонали:

**Уравнение в строке 3** остается без изменений.

Идем снизу вверх.

**Новое** уравнение в строке 2 = Уравнение в строке 2 - Коэффициент \* Уравнение в строке 3.

**Новое** уравнение в строке 1 = Уравнение в строке 1 - Коэффициент \* Уравнение в строке 2.

**Новое** уравнение в строке 0 = Уравнение в строке 0 - Коэффициент \* Уравнение в строке 1.

Коэфф. как в методе Гаусса (чтобы обнулить нужный элемент).

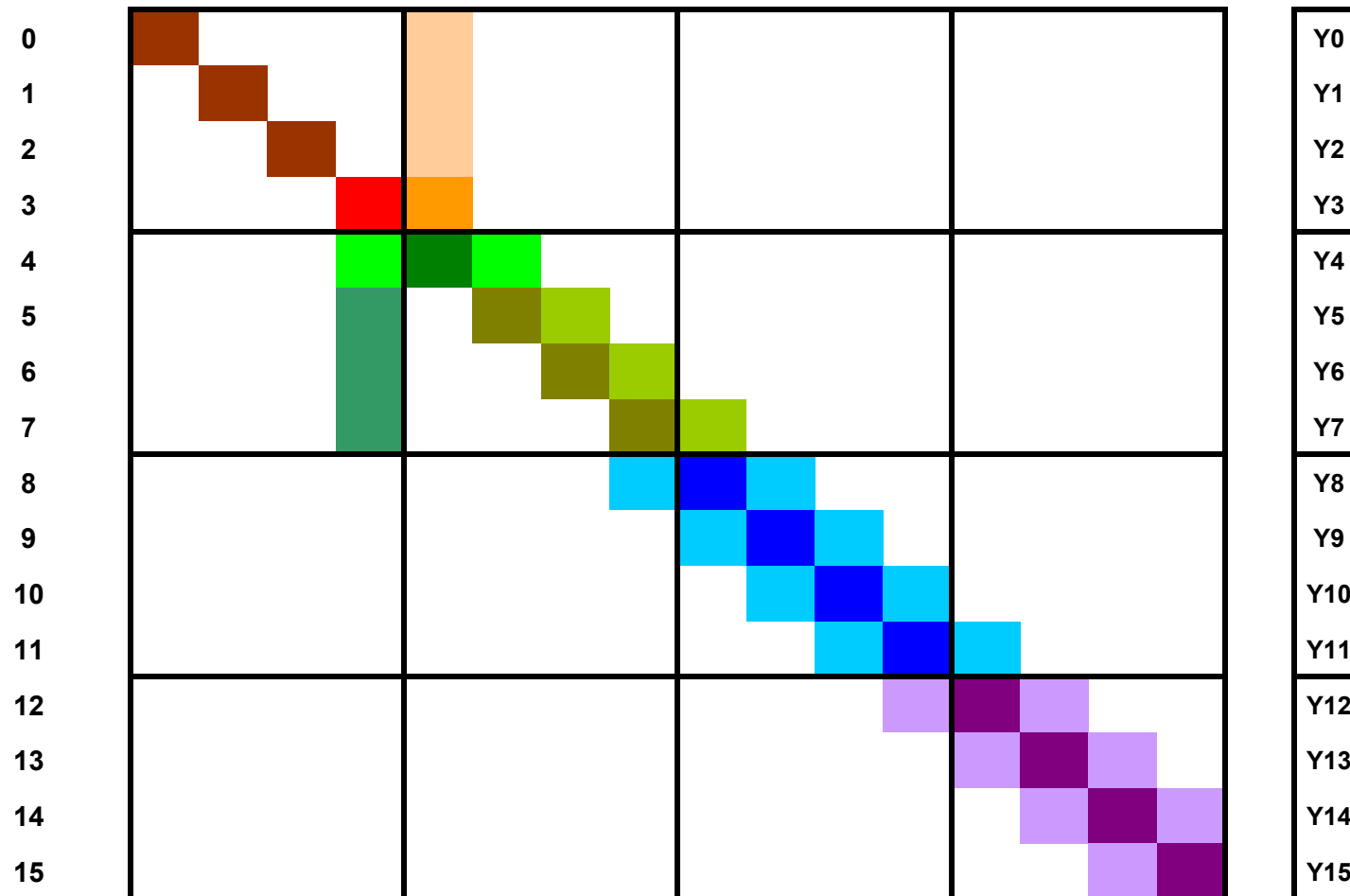
**Не забываем ПРАВЫЕ ЧАСТИ** в строках 3, 2, 1, 0.

Преобразования проводят над уравнениями, показанными на Слайде 3,

используя очередное обновленное уравнение в строках 3, 2, 1.

Коэффициенты не нумеруем.

(!!!) **В красном блоке** получили **диагональный (угловой) блок 4\*4** и **НЕНУЛЕВОЙ столбец 4 (рыжий)**.



**ВТОРОЙ** вычислит. узел (ВУ №2) в **СВОЕМ** блоке делает то же самое:

Нужно получить **НУЛИ** на нижней под-диагонали **зеленого блока**.

Затем - **НУЛИ** на верхней над-диагонали.

**Уравнение в строке 4** остается без изменений.

Идем сверху вниз.

**Новое** уравнение в строке 5 = **Старое** уравнение в строке 5 - Коэф. \* Уравнение в строке 4.

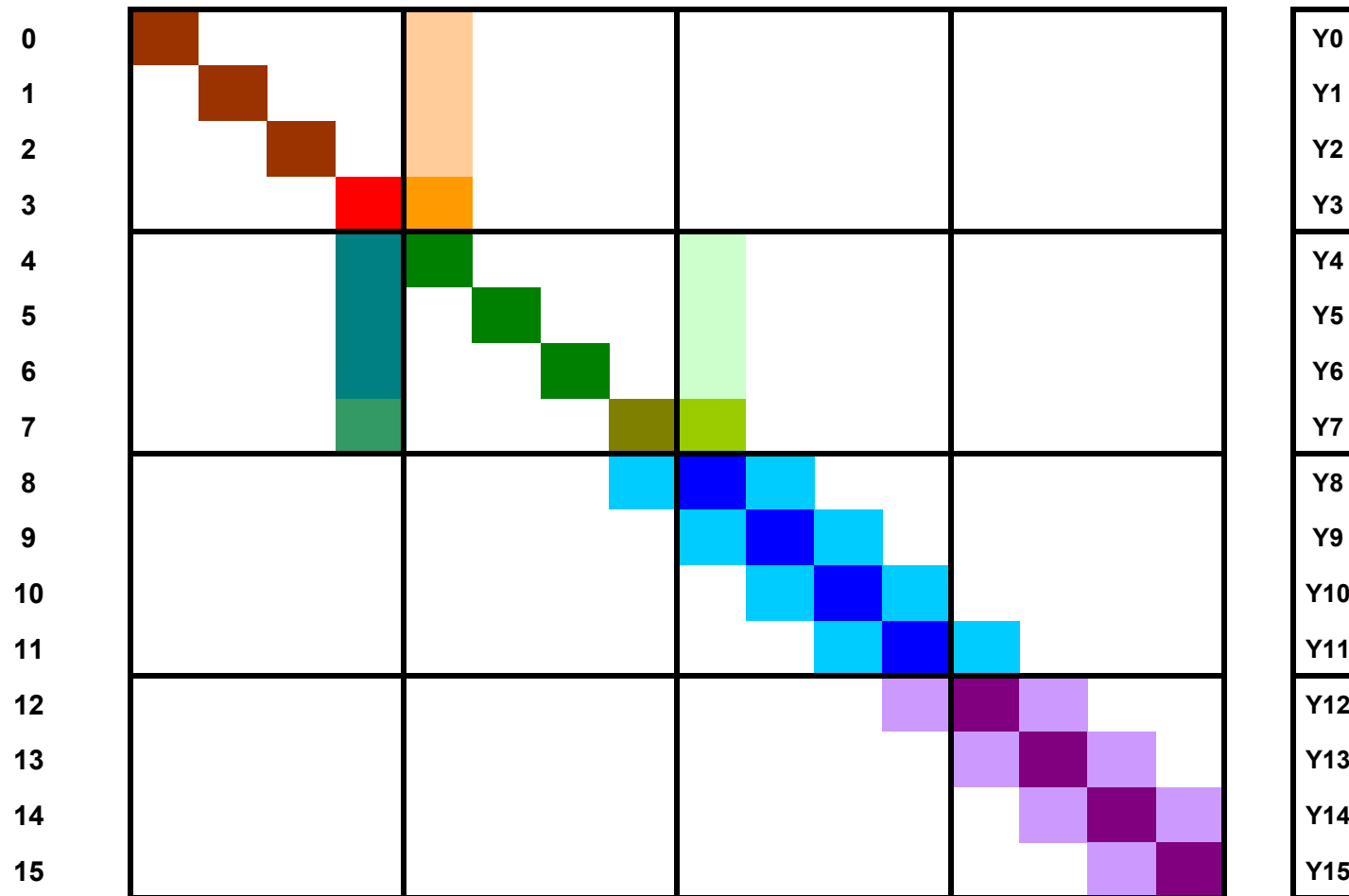
**Новое** уравнение в строке 6 = **Старое** уравнение в строке 6 - Коэф. \* **Новое** уравнение в строке 5.

**Новое** уравнение в строке 7 = **Старое** уравнение в строке 7 - Коэф. \* **Новое** уравнение в строке 6.

Коэффициенты как в методе Гаусса. Здесь для наглядности коэффициенты не пронумерованы.

Не забываем **ПРАВЫЕ ЧАСТИ СЛАУ**.

В результате преобразований **НУЛЕИ** "снизу" нет, есть **НЕНУЛЕВОИ (короткий) столбец 3**.



Далее получим **НУЛИ** на **ВЕРХНЕЙ** над-диагонали:

**Уравнение в строке 7** остается без изменений.

Идем снизу вверх.

**Новое** уравнение в строке 6 = Уравнение в строке 6 - Коэф. \* Уравнение в строке 7.

**Новое** уравнение в строке 5 = Уравнение в строке 5 - Коэф. \* Уравнение в строке 6.

**Новое** уравнение в строке 4 = Уравнение в строке 4 - Коэф. \* Уравнение в строке 5.

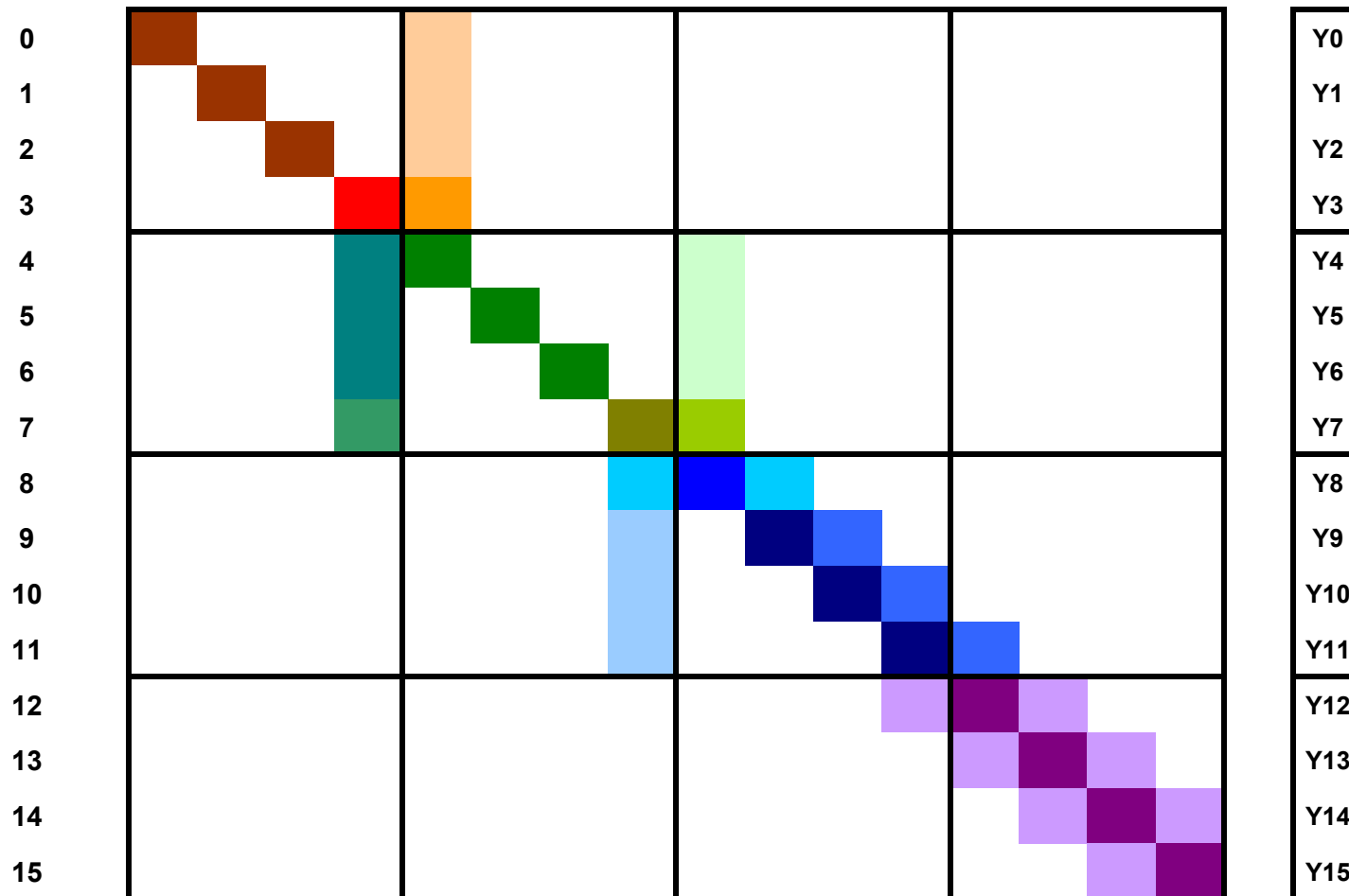
Коэфф. как в методе Гаусса.

**Не забываем ПРАВЫЕ ЧАСТИ** в строках 7, 6, 5, 4.

Преобразования проводят над уравнениями, полученными на Слайде 5.

используя очередное обновленное уравнение в строках 7, 6, 5.

**(!!!) В зеленом блоке получили диагональный блок 4\*4 и НЕНУЛЕВЫЕ столбцы 3, 8 (короткие зеленые).**



То же самое в СВОЕМ блоке делает ТРЕТИИ вычислит. узел (ВУ №3). Причем ОДНОВРЕМЕННО с первым и вторым. Цель: получить НУЛИ на нижней под-диагонали синего блока. Затем - НУЛИ на верхней над-диагонали.

Уравнение в строке 8 остается без изменений. Идем сверху вниз.

Новое уравнение в строке 9 = Старое уравнение в строке 9 - Коэф. \* Уравнение в строке 8.

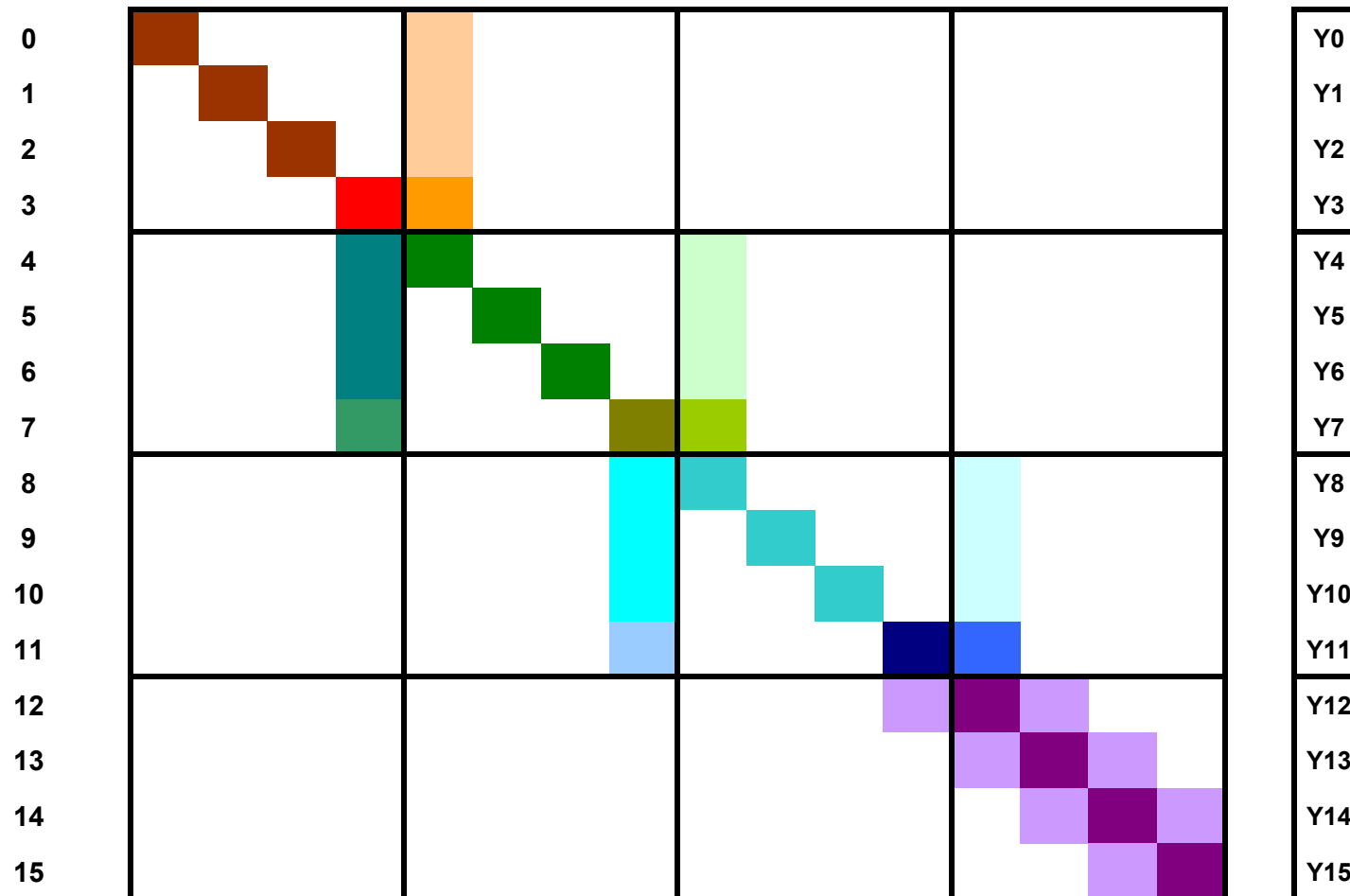
Новое уравнение в строке 10 = Старое уравнение в строке 10 - Коэф. \* Новое уравнение в строке 9.

Новое уравнение в строке 11 = Старое уравнение в строке 11 - Коэф. \* Новое уравнение в строке 10.

Коэффициенты как в методе Гаусса. Их не нумеруем.

Не забываем преобразовать ПРАВЫЕ ЧАСТИ.

В результате НУЛЕИ "снизу" нет, есть НЕНУЛЕВОИ (короткий) столбец 7.



Далее получим **НУЛИ** на **ВЕРХНЕЙ** над-диагонали:

**Уравнение в строке 11** остается без изменений.

Идем снизу вверх.

**Новое** уравнение в строке 10 = Уравнение в строке 10 - Коэф. \* Уравнение в строке 11.

**Новое** уравнение в строке 9 = Уравнение в строке 9 - Коэф. \* Уравнение в строке 10.

**Новое** уравнение в строке 8 = Уравнение в строке 8 - Коэф. \* Уравнение в строке 9.

Коэфф. как в методе Гаусса.

**Не забываем ПРАВЫЕ ЧАСТИ** в строках 11, 10, 9, 8

Преобразования проводят над уравнениями, полученными на Слайде 7,

используя очередное обновленное уравнение в строках 11, 10, 9.

**(!!!) В синем блоке получили диагональный блок 4\*4 и НЕНУЛЕВЫЕ столбцы 7, 12 (короткие синие).**

|    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |     |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|-----|
| 0  | ■ |   |   | ■ |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   | Y0  |
| 1  |   | ■ |   | ■ |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   | Y1  |
| 2  |   |   | ■ | ■ |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   | Y2  |
| 3  |   |   | ■ | ■ |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   | Y3  |
| 4  |   |   | ■ | ■ |   |   |   | ■ |   |   |   |   |   |   |   | Y4  |
| 5  |   |   | ■ | ■ | ■ |   |   | ■ |   |   |   |   |   |   |   | Y5  |
| 6  |   |   | ■ | ■ | ■ | ■ |   | ■ |   |   |   |   |   |   |   | Y6  |
| 7  |   |   | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ |   |   |   |   |   |   |   | Y7  |
| 8  |   |   |   |   |   |   | ■ | ■ |   |   |   | ■ |   |   |   | Y8  |
| 9  |   |   |   |   |   |   | ■ | ■ | ■ |   |   | ■ |   |   |   | Y9  |
| 10 |   |   |   |   |   |   | ■ | ■ | ■ | ■ |   | ■ |   |   |   | Y10 |
| 11 |   |   |   |   |   |   | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ |   |   |   | Y11 |
| 12 |   |   |   |   |   |   |   |   | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ |   |   | Y12 |
| 13 |   |   |   |   |   |   |   |   | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ |   | Y13 |
| 14 |   |   |   |   |   |   |   |   | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | Y14 |
| 15 |   |   |   |   |   |   |   |   | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | Y15 |

**ЧЕТВЕРТЫЙ** вычислит. узел (БУ №4) действует **ОДНОВРЕМЕННО** с остальными.

Та же цель: **НУЛИ** на нижней под-диагонали **блока**.

Затем - **НУЛИ** на верхней над-диагонали.

**Уравнение в строке 12** остается без изменений.

Идем сверху вниз.

**Новое** уравнение в строке 13 = **Старое** уравнение в строке 13 - Козф. \* Уравнение в строке 12.

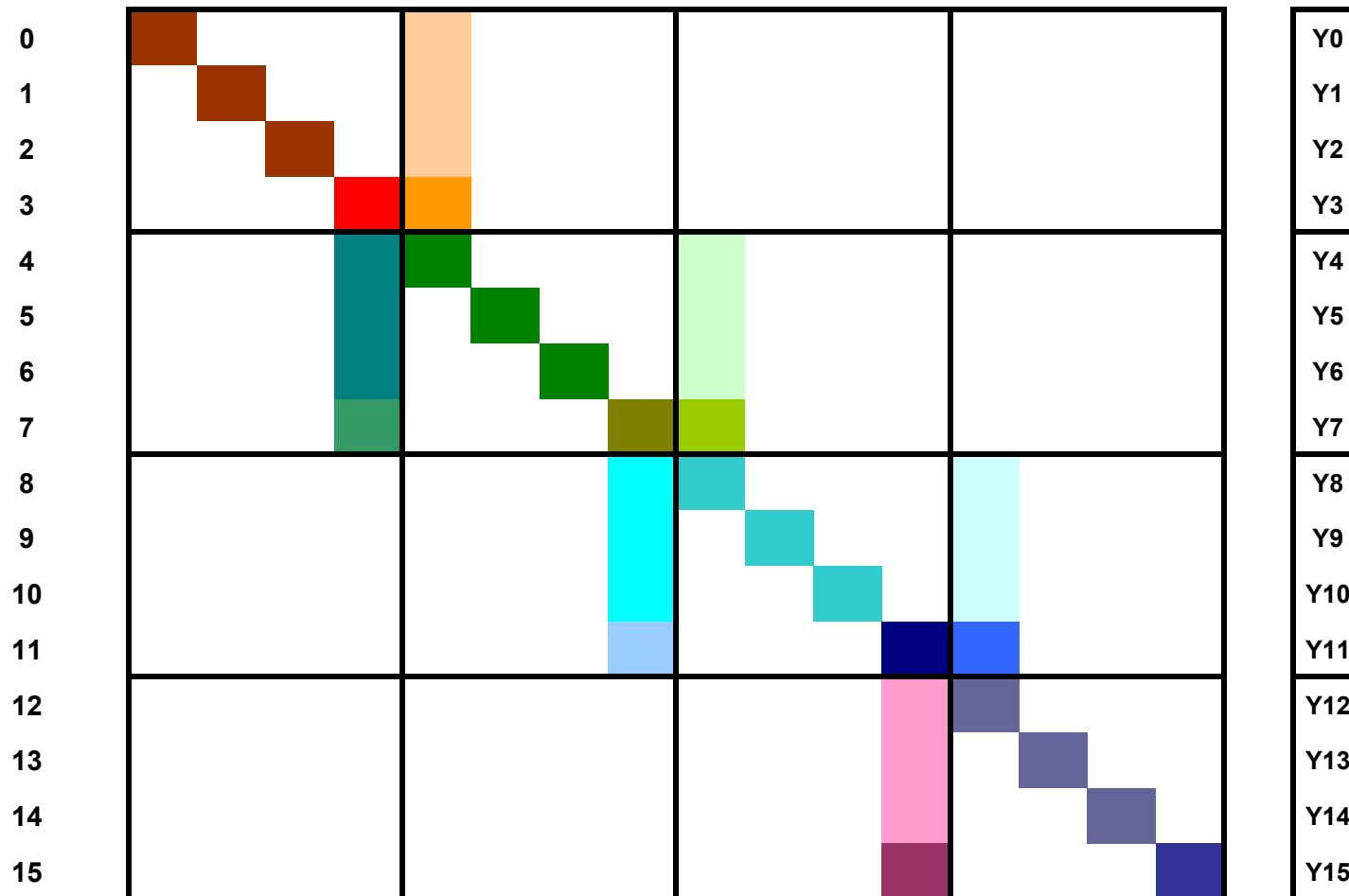
**Новое** уравнение в строке 14 = **Старое** уравнение в строке 14 - Козф. \* **Новое** уравнение в строке 13.

**Новое** уравнение в строке 15 = **Старое** уравнение в строке 15 - Козф. \* **Новое** уравнение в строке 14.

Кoeffициенты как в методе Гаусса (чтобы обнулить элемент).

**Не забываем преобразовать ПРАВЫЕ ЧАСТИ.**

В результате **НУЛЕИ** "снизу" нет, есть **НЕНУЛЕВОИ** (короткий) столбец 11.



Далее получим нули на ВЕРХНЕЙ над-диагонали:

Уравнение в строке 15 остается без изменений.

Идем снизу вверх.

Новое уравнение в строке 14 = Уравнение в строке 14 - Коэф. \* Уравнение в строке 15.

Новое уравнение в строке 13 = Уравнение в строке 13 - Коэф. \* Уравнение в строке 14.

Новое уравнение в строке 12 = Уравнение в строке 12 - Коэф. \* Уравнение в строке 13.

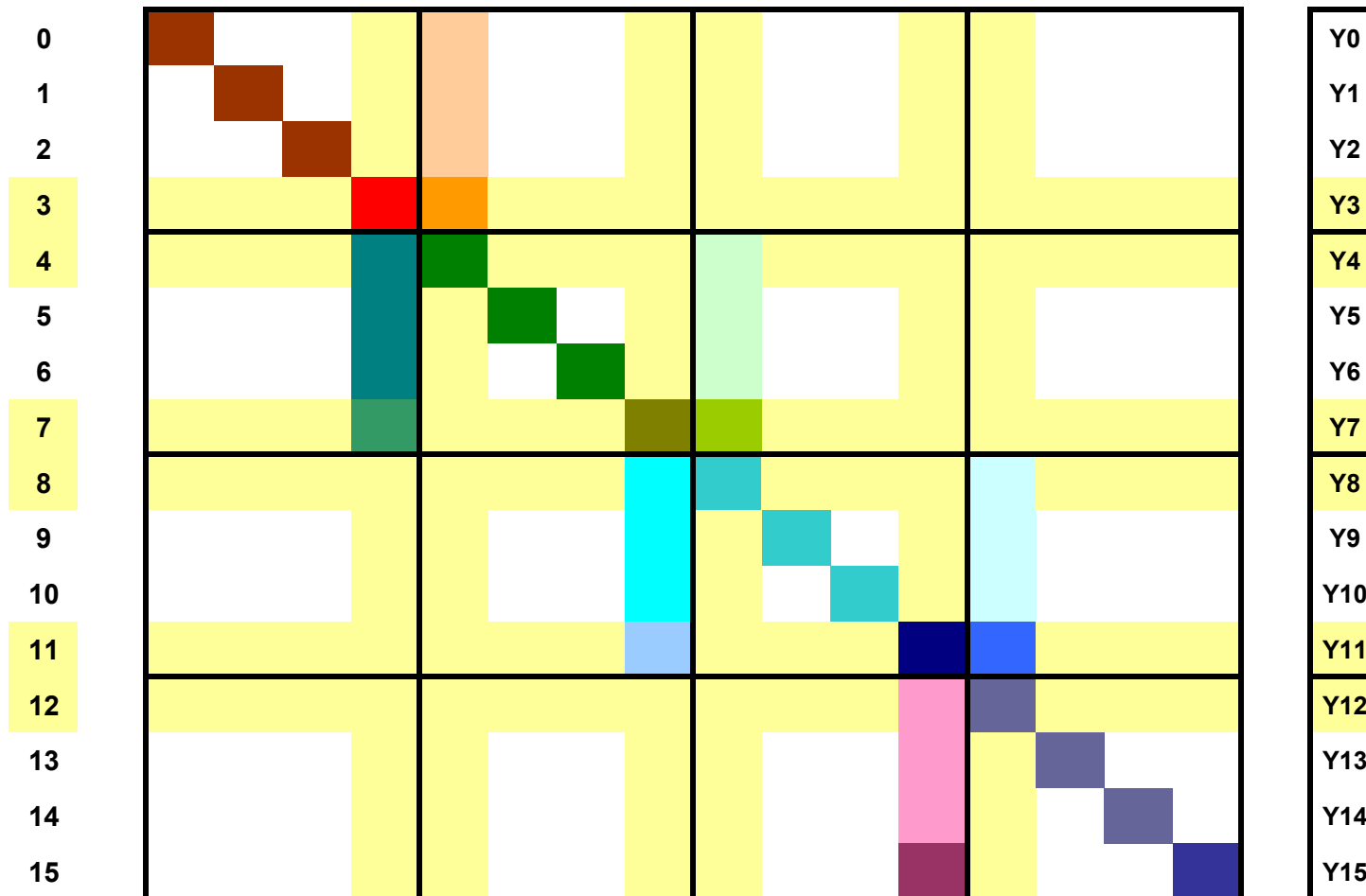
Коэфф. как в методе Гаусса.

Не забываем ПРАВЫЕ ЧАСТИ уравнений в строках 15, 14, 13, 12.

Преобразования проводят над уравнениями, полученными на Слайде 9.

используя очередное обновленное уравнение в строках 15, 14, 13.

(!!!) В фиолетовом блоке есть диагональный (угловой) блок 4\*4 и НЕНУЛЕВОЙ столбец 11 (короткий фиолетовый).



На слайдах 3-10 показан **ПЕРВЫИ ПАРАЛЛЕЛЬНИИ УЧАСТОК** исполнения программы. Все 4 ВУ работали **ОДНОВРЕМЕННО**. Каждый ВУ сформировал "свою СЛАУ" из 4-х уравнений.

*Дальше параллельно работать не получится*, так как по-прежнему ВУ №1 должен использовать значение Y4, за которое отвечает ВУ №2; ВУ №2 должен знать Y3 и Y8, за которые отвечают ВУ №1 и ВУ №3 и т.д.

Соберем уравнения в строках 3, 4, 7, 8, 11, 12 для неизвестных, "мешающих" параллельному исполнению: это неизвестные Y3, Y4, Y7, Y8, Y11, Y12. **Эти уравнения на Слайде 11 выделены желтым.**



3 4 7 8 11 12

|    |  |  |  |  |  |     |
|----|--|--|--|--|--|-----|
| 3  |  |  |  |  |  | Y3  |
| 4  |  |  |  |  |  | Y4  |
| 7  |  |  |  |  |  | Y7  |
| 8  |  |  |  |  |  | Y8  |
| 11 |  |  |  |  |  | Y11 |
| 12 |  |  |  |  |  | Y12 |

На данном слайде показана матрица СЛАУ для неизвестных Y3, Y4, Y7, Y8, Y11, Y12

В каждой строке матрицы только 3 ненулевых элемента.

Упорядочим неизвестные следующим образом:

Y4, Y3, Y8, Y7, Y12, Y11

(сначала неизвестные, мешающие ВУ №1, то есть Y4,

затем неизвестные, мешающие ВУ №2, то есть Y3, Y8

затем мешающие ВУ №3, то есть Y7, Y12

затем Y11 (мешает ВУ №4).

3 4 7 8 11 12

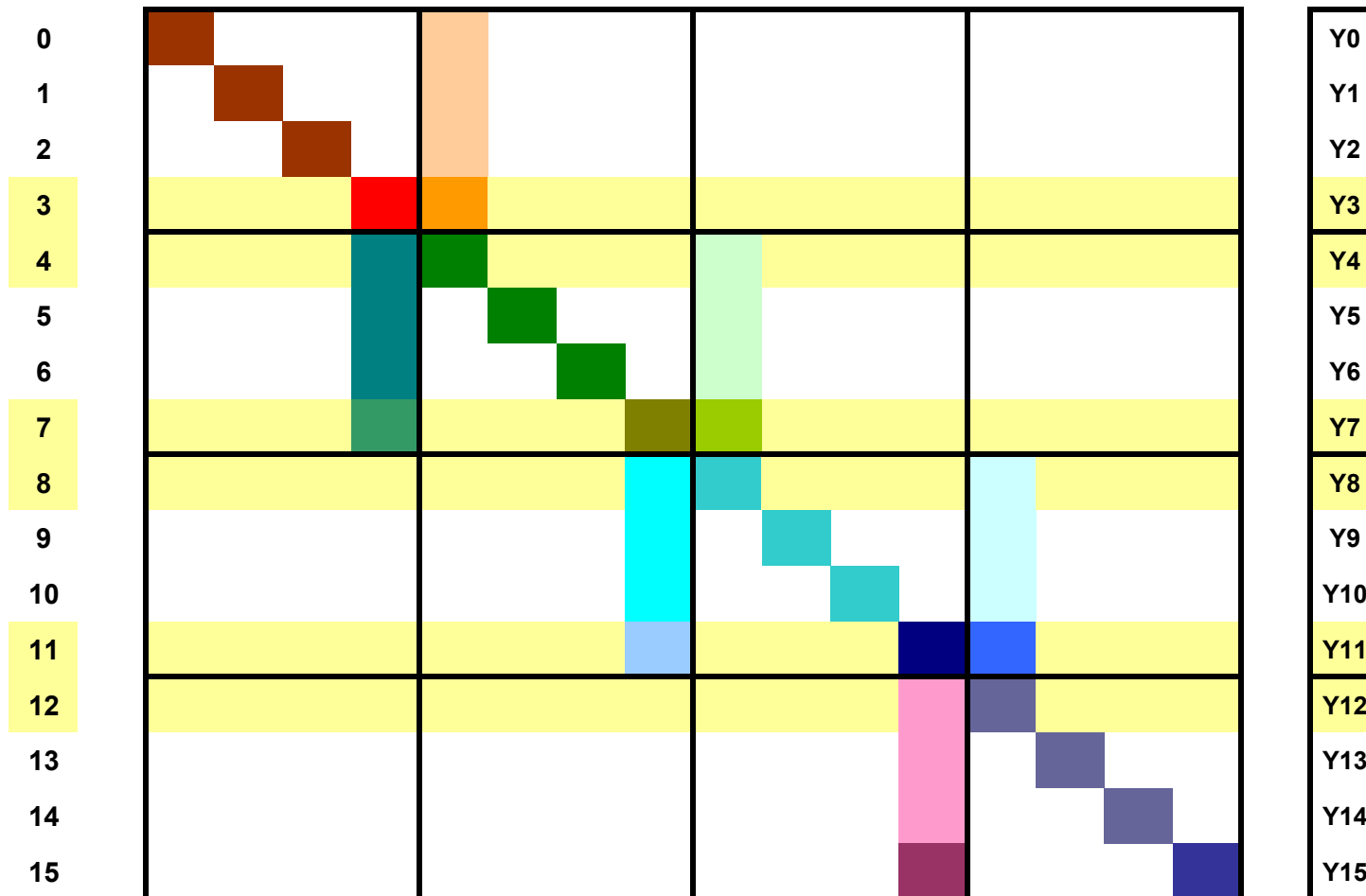
|    |  |  |  |  |  |     |
|----|--|--|--|--|--|-----|
| 3  |  |  |  |  |  | Y3  |
| 4  |  |  |  |  |  | Y4  |
| 7  |  |  |  |  |  | Y7  |
| 8  |  |  |  |  |  | Y8  |
| 11 |  |  |  |  |  | Y11 |
| 12 |  |  |  |  |  | Y12 |

4 3 8 7 12 11

|    |  |  |  |  |  |     |
|----|--|--|--|--|--|-----|
| 4  |  |  |  |  |  | Y4  |
| 3  |  |  |  |  |  | Y3  |
| 8  |  |  |  |  |  | Y8  |
| 7  |  |  |  |  |  | Y7  |
| 12 |  |  |  |  |  | Y12 |
| 11 |  |  |  |  |  | Y11 |

Получили СЛАУ с 3-диагональной матрицей  
(потому что поменяли порядок неизвестных)

Решаем СЛАУ классической (последовательной) прогонкой.  
Размерность СЛАУ 6\*6.



**Возвращаемся к СЛАУ, полученной в ходе параллельного преобразования.**

Уравнения в строках 3, 4, 7, 8, 11, 12 уже решены (выделено желтым). Осталось решить  $16-6=10$  уравнений.

ВУ №1 должен решить оставшиеся 3 уравнения.

ВУ №2 - оставшиеся 2 уравнения.

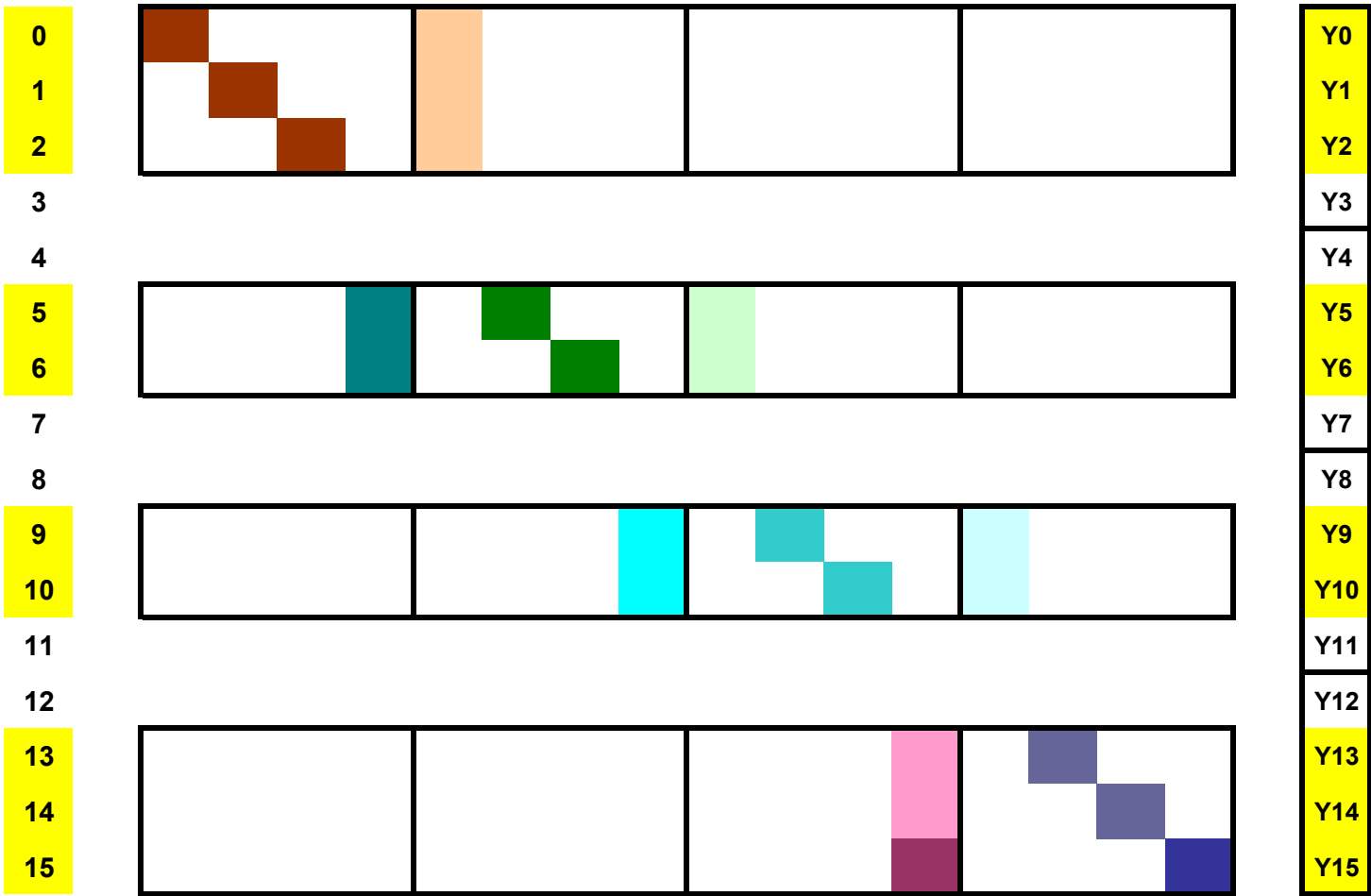
ВУ №3 - 2 уравнения.

ВУ №4 - 3 уравнения.

**Можно считать, что каждая из 4-х СЛАУ имеет диагональную матрицу, потому что**

Y4, Y3, Y8, Y7, Y12, Y11 найдены и коэффициент (элемент) матрицы, умноженный на любое из чисел

Y4, Y3, Y8, Y7, Y12, Y11 можно перенести в правую часть системы.



На слайде 15 показан **ВТОРОИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ УЧАСТОК** исполнения программы.  
 Все 4 ВУ работают **ОДНОВРЕМЕННО**. Они находят "желтые" неизвестные из уравнений 0, 1, 2, 5, 6, 9, 10, 13, 14, 15.  
 По завершении работы каждого узла **НУЖНО СОБРАТЬ ОТВЕТ**: показать вектор  $Y=(Y_0, Y_1, \dots, Y_{15})$   
 Показанный на слайдах 3-15 способ решения трехдиагональной СЛАУ требует **БОЛЬШЕГО** числа действий, чем классическая (последовательная) прогонка.  
 При этом за счет **ОДНОВРЕМЕННОГО** исполнения операций **МНОГИМИ** вычислительными узлами общее время решения СЛАУ в параллельном исполнении может быть **МЕНЬШЕ**, чем время, затраченное последовательной прогонкой.  
 Это так, если  $n$  велико и число  $p$  согласовано с  $n$ . Здесь  $(n+1)*(n+1)$  размерность СЛАУ,  $p$  - число вычисл. узлов.

## ПРИМЕР

Пусть уравнений  $n+1$ , вычислительных узлов  $p$ .

Без ограничения общности считаем, что  $n+1$  кратно  $p$ .

Тогда каждый ВУ отвечает за  $m$  неизвестных и "обработку"  $m$  уравнений:  $m=(n+1)/p$ .

На **ПЕРВОМ ПАРАЛЛЕЛЬНОМ УЧАСТКЕ** программы **ВСЕ** ( $p$ ) вычислительные узлы **ОДНОВРЕМЕННО** приводят СЛАУ к следующему виду:  $p$  диагональных блоков размерности  $m \times m$  и короткие ненулевые столбцы (столбцы длины  $m$ , см. Слайд 10)

Затем **ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ УЧАСТОК** программы: **ПРОГОНКОЙ** решаем СЛАУ с 3-х диагональной матрицей размерности  $(2 \times (p-1)) \times (2 \times (p-1))$  (по числу "мешающих" параллельному исполнению неизвестных) Они имеют номера  $m, m-1, 2m, 2m-1, \dots, (p-1) \times m, (p-1) \times m - 1$  (проверить).

Затем следует **ВТОРОЙ ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ УЧАСТОК** программы: каждый вычислительный узел решает "свою" СЛАУ с диагональной матрицей, предварительно преобразовав **ПРАВУЮ ЧАСТЬ** "своей" СЛАУ с учетом значений одной-двух "ранее мешавших" неизвестных.

## ЗАДАНИЕ

- 1) Число действий последовательной прогонки  $8 \times n - 1$  (проверить)
- 2) Число действий **последовательного этапа** параллельной прогонки  $8 \times \{2 \times (p-1) - 1\} - 1$  (проверить)
- 3) Число действий **первого параллельного участка** параллельной прогонки (?)
- 4) Число действий **второго параллельного участка** параллельной прогонки (?)
- 5) **Общее число действий** параллельной реализации прогонки (?)

Наталья Романовна Стронгина

**КУРС «ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ»**

**Уравнение теплопроводности как модельная задача дисциплины  
(Модули 4-7, стационарный случай)**

*Учебно-методическое пособие*

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования «Национальный исследовательский  
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».  
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.